Diszkrét eloszlások

Diszkrét eloszlással van dolgunk, ha egy kísérletnek véges vagy megszámlálhatóan végtelen számú eredménye lehetséges, és ezek valószínűségét határozzuk meg. Az egyes eredményeket sorszámozzuk, majd meghatározuk az adott sorszámhoz tartozó eredmény valószínűségét. Az így kapott *valószínűség*(*sorszám*) függvényt **súlyfüggvény**nek nevezzük.

Pl. van 3 piros és 2 zöld golyónk egy dobozban. Véletlenszerűen egymás után húzunk 3 golyót. Mi a valószínűsége, hogy az első k húzással húzunk pirosat:
-az első húzással pirosat húzunk:

a valószínűség definició szerint $P(x=1)=\frac{kedvező_esetek_száma}{összes_eset_száma}=\frac{3}{5}$, mivel első húzásra 5 golyóból húzhatunk, és 3 van ami piros.
-második húzással is pirosat húzunk:

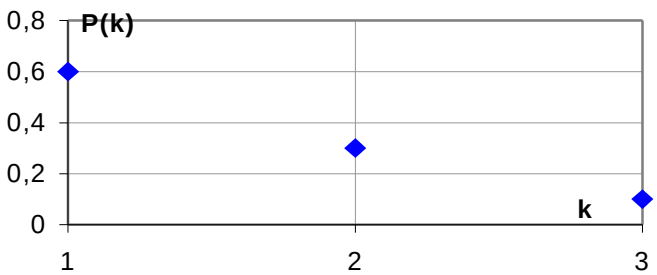
ez feltételezi, hogy az első húzással is pirosat húztunk. $P(x=2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$, mert a második húzáskor már csak négy golyó van, és ebből csak 2 piros, mert egyet már kihúztunk.
-harmadik húzással is pirosat húzunk:

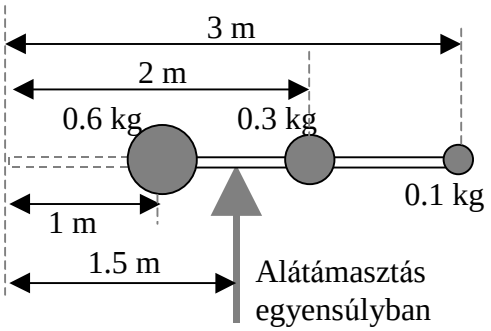
ez feltételezi, hogy az első két húzással is pirosat húztunk. $P(x=3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$

Tehát annak az eloszlásnak súlyfüggvénye, hogy az első hány húzásra kapunk piros golyót:

k	1	2	3
$P(x=k)$	0.6	0.3	0.1

Grafikonnal:





Várható érték:

Definíció szerint: $M(x)=m=\sum k\cdot P(x=k)=1\cdot 0.6+2\cdot 0.3+3\cdot 0.1=1.5$

Ez mit is jelent: Ha elég sokszor megismételjük a kísérletet, minden alkalommal felírjuk, hogy az első hány húzás volt piros, akkor a felírt számok átlaga 1.5 lesz (ezt az ún. „nagy számok törvénye” monja ki). Másképp: ha a valószínűségeket egy rúdon 1m távolságban elhelyezett a valószínűséggel megegyegyező tömegű súlyokkal helyettesítem, akkor a rudat a végponttól 1.5m távolságban kell alátámaztani, hogy egyensúlyban legyen (a rúd súlyát elhanyagoltuk).

Szórás:

Definíció szerint:
$$s=D(x)=\sqrt{M\left((k-m)^2\right)}=\sqrt{\sum(k-m)^2\cdot P(x=k)}=$$
$$=\sqrt{(1-1.5)^2\cdot 0.6+(2-1.5)^2\cdot 0.3+(3-1.5)^2\cdot 0.1}=0.45$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Ez mit is jelent: Ha elég sokszor megismételjük a kísérletet, minden alkalommal felírjuk, hogy az első hány húzás volt piros, akkor a felírt számok várható értéktől való eltérésének abszolút értékének átlaga 0.45 lesz.
Van pár speciális kísérlet, amelynek az egyes eredményeihez tartozó eloszlásfüggvénye azonos alakú:

Binomiális eloszlás
Ha egy kísérletnek csak az egyik lehetséges „A” eredménye érdekel minket, tudjuk hogy ennek az eredménynek mi a valószínűsége (a valószínűség definíciója alapján), és ezt a kísérletet elvégezzük egymástól függetlenül n-szer, akkor annak a valószínűsége, hogy az n db kísérletből k-szor a minket érdeklő eredmény jön ki a következőképen írható fel:

$$P(x=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=\left(\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\right)\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Ahol k a kedvező „A” eredmények száma; X a valószínűségi változó; p az „A” eredmény valószínűsége egy kísérlet alatt; n az összes elvégzett kísérlet.
A binomiális eloszlás várható értéke: np
Szórása: $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Pl: dobókockával dobunk egymás után 20-szor (vagy 20 dobókockávaldobunk egyszer). Mi a valószínűsége, hogy 6-nál több de 10-nél kevesebb hatos lesz?

Itt n = 20, k = 7,8,9 p = $\frac{1}{6}$, mert egy dobásból ennyi a hatosdobás valószínűsége és minden dobás független a másiktól.

$$P(6<x<10)=\sum_{k=7}^{9}P(x=k)=\sum_{k=7}^{9}\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}=$$

$$=\binom{20}{7}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^7\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{20-7}+\binom{20}{8}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^8\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{20-8}+\binom{20}{9}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^9\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{20-9}$$

Poisson eloszlás
Akkor alkalmazzuk, ha nagyon kis valószínűségű eseményt nagyon nagyszámú független kísérlettel próbálunk előidézni.
Ha a binomiális eloszlásnál látott kísérletben p nagyon kicsi, n nagyon nagy és np véges szám, akkor az valószínűség modellezhető Poisson eloszlással is. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a minket érdeklő esemény k-szor bekövetkezik:

$$P(x=k)=e^{-l}\cdot\frac{l^k}{k!}$$

A poisson eloszlás várható értéke: λ
Szórása: $\sqrt{l}$
Ahol λ = np mert a binomiális eloszlásnak, amiből származtattuk, np a várható értéke, és *e* a természetes alapú logaritmus alapja (~2.71).

Pl, egy hivatalban annak a valószínűsége, hogy egy telefon egy nap alatt elromlik 0.005. A hivatalban 800 darab telefon van. Mi a valószínűsége, hogy egy nap alatt több mint 2 de kevesebb mint 6 telefon romlik el?
A telefonok egymástól függetlenül romlanak el, np = 4.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$P(2 < x < 6) = \sum_{k=3}^{5} P(x = k) = \sum_{k=3}^{5} e^{-4} \cdot \frac{4^k}{k!} =$$

$$= e^{-4} \cdot \frac{4^3}{3!} + e^{-4} \cdot \frac{4^4}{4!} + e^{-4} \cdot \frac{4^5}{5!}$$

Geometriai eloszlás:

Akkor alkalmazzuk, amikor egy kísérletet addig ismétlünk egymástól függetlenül újra és újra, amíg egy minket érdeklő ismert p valószínűségű kísérleti eredmény ki nem jön. Ekkor annak a valószínűsége, hogy k-szor kell elvégeznünk a kísérletet:

$$P(x = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

A geometriai eloszlás várható értéke: $\frac{1}{p}$

Szórása: $\frac{1-p}{p^2}$

Pl:

Dobókockával dobunk egymás után addig, míg hatost nem kapunk (másképp: az első hatosig). Mi a valószínűsége, hogy 5-nél többet, de 9-nél kevesebbet kell dobnom?

A hatosdobás valószínűsége egy kísérlet során: $p = \frac{1}{6}$, minden új dobás független az előzőtől.

$$P(5 < x < 9) = \sum_{k=6}^{8} P(x = k) = \sum_{k=6}^{8} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

Hipergeometrikus eloszlás:

Akkor alkalmazzuk, amikor egyszerre nagyszámú N független kísérletet zajlik, amit mi nem láthatunk (pl egy zárt dobozban), melynek során tudjuk, hogy M db kísérletben kapunk egy minket érdeklelő ismert valószínűségű „A” eredményt. Megvizsgáljuk ebből n db kísérlet eredményét. Ekkor annak a valószínűsége, hogy ebből k db kísérletben bekövetkezett „A” (ha n ≤ M):

$$P(x = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}}$$

A hipergeometrikus eloszlás várható értéke: $n\frac{M}{N}$

Szórása: $\sqrt{n \cdot \frac{M}{n} \cdot \left(\frac{N-M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)}$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Pl. egy TV gyárban 1000 db TV-t gyártanak naponta. Ebből a napi 1000 db-ból a Keravill naponta 50 db-t vásárol fel. A gyár eddigi tapasztalatai szerint annak a valószínűsége, hogy egy készülék hibás 0.06 . Mi a valószínűsége, hogy két hibás kerül a Keravillhoz?
Az 1000 darab TV-ben $0.06 \cdot 1000 = 60$ db hibás van. N = 1000; M = 60; n = 50; k = 2.

$$P(x=2)=\frac{\binom{60}{2}\cdot\binom{1000-60}{50-2}}{\binom{1000}{2}}$$

Esetünkben a valószínűséget nem tudjuk kiszámítani, mert 1000 faktoriálisát nem tudjuk egy általánosan használt számológéppel kiszámítatni. Ehhez lehet segítség a következő közelítés:

Ha N és M nagy számok, akkor **a hipergeometrikus eloszlás közelíthető binomiális eloszlással**, ahol $p=\frac{M}{N}$. A példánk megoldása ez alapján:

p = 0.06, n = 50, k = 2. $P(x=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

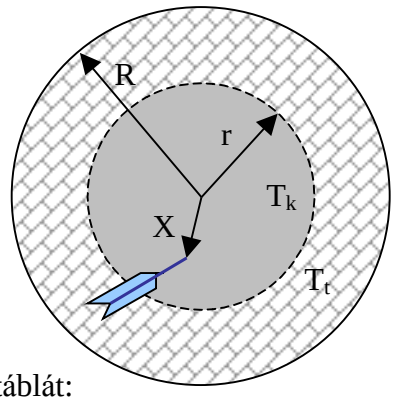
$$P(x=2)=\binom{50}{2}0.06^2\cdot(1-0.06)^{50-2}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Folyamatos eloszlások

Folyamatos eloszlással van dolgunk, ha egy kísérlet eredményeit nem tudjuk egy értékhez, csak egy tartományhoz kötni. Pl. véletlenszerűen dobálunk dartssal egy R sugarú, kör alakú céltáblát (a véletlenszerűséget biztosíthatjuk, ha bekötjük a szemünket, a lényeg, hogy a dobások iránya ne célzatosan legyen kiválasztva). Ha a táblát miden dobás eltalálja (**vagy:** csak a táblát eltaláló dobásokat vesszük figyelembe), mi a valószínűsége, hogy a találat a középponthoz képest egy r sugarú körön belül lesz?
Mivel a dobások véletlenszerűek (célzatlanok), a táblán minden elemi felületegységet egyenlő valószínűséggel találunk el. Ha csak a táblát eltaláló dobásokkal számolunk, akkor a tábla teljes T_t felületét 1 valószínűséggel találjuk el. Mivel minden felületegység azonos valószínűséggel található el, egy tetszőleges általunk kijelölt T_k felület találati valószínűsége:

$$P(T_k) = \frac{T_k}{T_t}$$



A tábla felülete:

$$T_t = R^2 p$$

A középponthoz képest r sugarú kör területe:

$$T_k = r^2 p$$

Ebből:

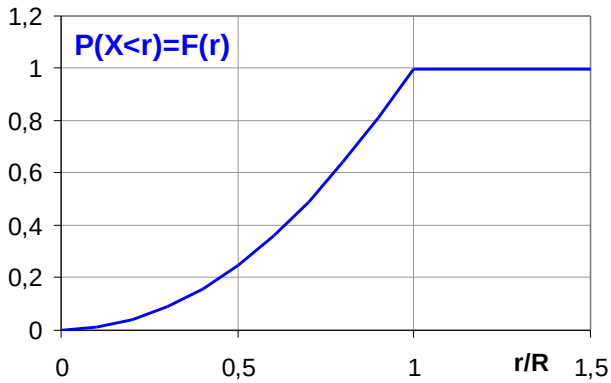
$$P(X < r) = \frac{r^2}{R^2}; r \le R$$

Ha r > R, mivel azt mondtuk, hogy minden dobás eltalálja a táblát:

$$P(X < r) = 1; R < r$$

Ezzel tulajdonképpen definiáltunk egy valószínűség-függvényt, az ún. **eloszlási függvény**t (a jele F(r)). A függvény egy teszőleges „r” pontban felvett értéke annak a valószínűségét adja meg, hogy a valószínűségi változó kisebb mint „r”. Ábrázolva:

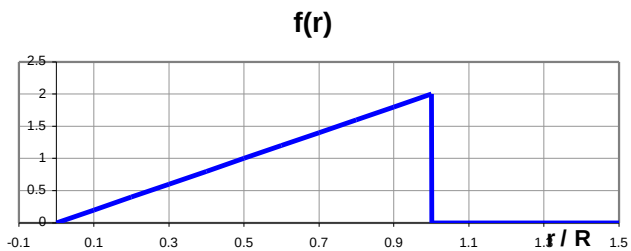
Az eloszlási függvény nem csökkenő, mert ahogy haladonk a legkisebb „r” értéktől felfelé, az új szakaszok 0 vagy pozitív valószínűségéhez hozzáadódik az addigi szakasz 0 vagy pozitív valószínűsége (az addigi szakasz is beletartozik az X < r intervallumba). Az eloszlási függvény önmagában nem illetve kényelmetlen módon szolgáltat információt arról, hogy az egyes szakaszoknak mekkora a valószínűsége, és így mennyivel járulnak hozzá az eloszlásfüggvény értékéhez.



Erről tájékoztatást az eloszlásfüggvény első „r” szerinti deriváltja ad. Ez az ún. **sűrűségfüggvény** (a jele f(r)). A példánkban:

$$f(r) = \frac{\partial F(r)_{r<R}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{r^2}{R^2} = \frac{2 \cdot r}{R^2}; r < R$$

$$f(r) = \frac{\partial F(r)_{R<r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} 1 = 0; R < r$$

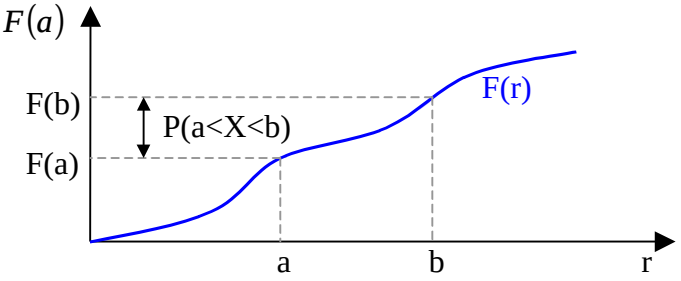


PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

A valószínűségi változó egyes tartományaihoz tartozó valószínűséget kétféleképpen határozhatjuk meg:

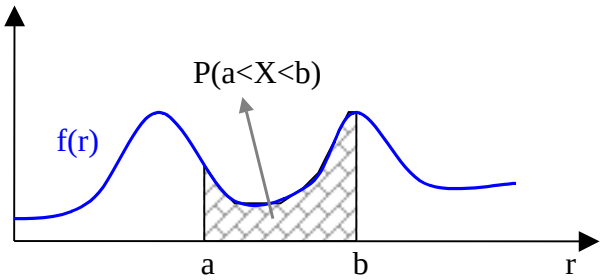
1. Az eloszlásfüggvény tartományhatárokon felvett értékeiből:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$



2. A sűrűségfüggvény tartományon vett integráljából:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(r)dr$$



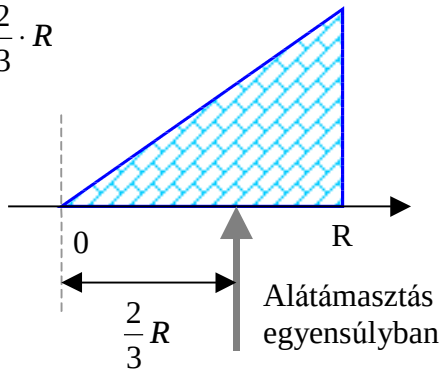
A folyamatos eloszlásokon is értelmezzük a **várható érték**et:

$$m = M(r) = \int_{-\infty}^{\infty} r \cdot f(r)dr$$

A példánkban (mivel f(r) = 0, ha r <0 vagy R < r):

$$m = M(r) = \int_0^R r \cdot \frac{2r}{R^2} dr = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{R^2} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3} \cdot R$$

Ez mit is jelent: Ha elég sokszor megismételjük a kísérletet, minden alkalommal felírjuk, hogy a dobás középponttól mért távolságát, akkor a felírt távolságok átlaga m lesz (ezt szintén a „nagy számok törvénye” mondja ki). Másképp: ha a sűrűségfüggvény grafikonját kivágom papírból, akkor az alakzatot a végponttól m távolságban kell alátámaztani, hogy egyensúlyban legyen .



A folyamatos eloszlás szórásnégyzete:

$$s^2 = M\left((r-m)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \cdot (r-m)^2 dr$$

Ebből a **szórás**:

$$s = \sqrt{M\left((r-m)^2\right)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(r) \cdot (r-m)^2 dr}$$

A példánkban:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$s^2 = \int_0^R \frac{2r}{R^2} \cdot \left(r - \frac{2}{3}R\right)^2 dr = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R r \cdot \left(r - \frac{2}{3}R\right)^2 dr = \frac{2}{R^2} \cdot \int_0^R r \cdot \left(r^2 - \frac{4}{3}rR + \frac{4}{9}R^2\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2} \cdot \left(\int_0^R r^3 \cdot dr - \frac{4}{3} \cdot \int_0^R r^2 \cdot dr + \frac{4}{9} \cdot \int_0^R r \cdot dr\right) = \frac{2}{R^2} \cdot \left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R - \frac{4}{3} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R + \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2} - \frac{8}{9} \cdot R + \frac{4}{9}$$

Ebból a szórás:

$$s = \sqrt{\frac{R^2}{2} - \frac{8}{9} \cdot R + \frac{4}{9}}$$

Ez mit is jelent: Ha elég sokszor megismételjük a kísérletet, minden alkalommal felírjuk, hogy a dobás középponttól mért távolságát, akkor a felírt távolságok várható értéktől való eltérésének abszolút értékének átlaga σ lesz.

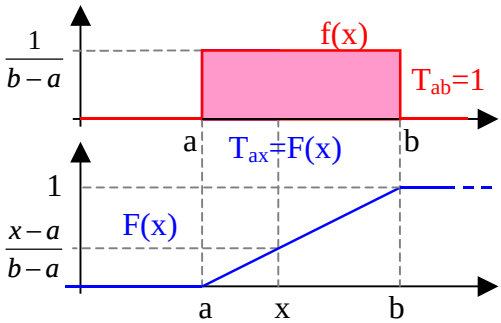
Folyamatos eloszlásokra is léteznek speciális eloszlásfüggvények, melyeket több kísérlet leírásához fel lehet használni.

Egyenletes eloszlás

Sűrűségfüggvénye a valószínűségi változó értelmezési tartományában konstans, azon kívül 0.

Ha a valoszínűségi változó a < b intervallumon értelmezett:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & egyebkent \end{cases}$$



Ekkor:

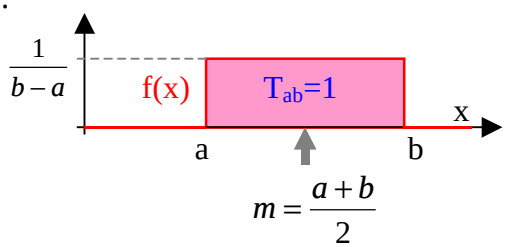
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} = x & a \le x < b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke:

$$m = M(x) = \frac{a+b}{2}$$

Szórása:

$$s = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$



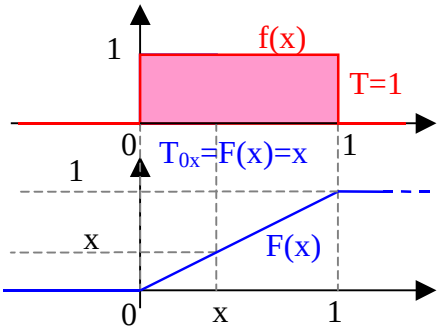
Az egyenletes eloszlás ott alkalmazható, ahol a kísérletnek nincs kitüntetett eredménye, minden lehetséges eredménynek azonos valószínűsége. (Ha a darts-os példában a területegységet választotjuk valószínűségi változónak, akkor az is egyenletes eloszlású.) Ilyenek például a kerekítési hibák.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Pl.: Egy digitális karórán a kijelzés óra-óra : perc-perc : másodperc-másodperc formátumú. Mivel az óráról a pontos időt csak másodperces pontossággal tudjuk meghatározni, a leolvasaskori tenyleges pontos ido pedig a leolvasott és az azt követő másodperc között bármi lehet, leolvasási hiba keletkezik. Határozzuk meg a leolvasási hiba eloszlását.

Mivel az óraleolvasással általában nem célozunk meg időpontot (nem akarjuk az időt pont 12:00:00-kor lolvasni csak valamikor dél felé), ezért egyenletes eloszlású lesz.
A hiba 0s (pont másodpercváltáskor néztem az órára) és 1s (pont másodpercváltás előtt olvasom le az órát) között fog mozogni.
Az eloszlás ezek szerint:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-0}=1 & 0<x<1\\ 0 & egyebkent\end{cases}$$



Ekkor:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x-0}{1-0}=x & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\end{cases}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Exponenciális eloszlás

Sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ l\cdot e^{-lx} & 0<x \end{cases}$$

Ebből:

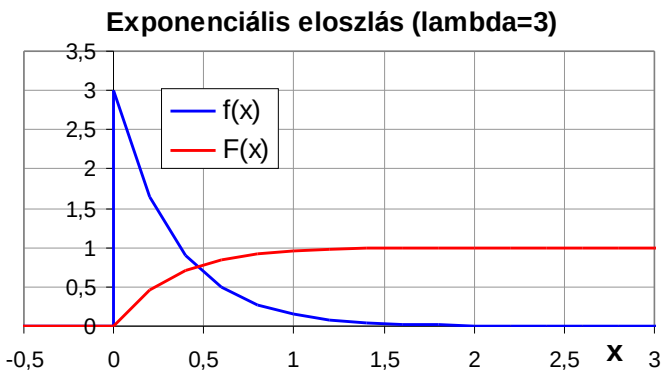
$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1-e^{-lx} & 0<x \end{cases}$$

Várható értéke:

$$m=\frac{1}{l}$$

Szórása:

$$s=\frac{1}{l}$$



Exponenciális eloszlással modellezhetők a várakozási idők.
Pl. egy izzótípusról megállapították, több példány kipróbálásával, hogy átlagosan minden negyediknek lesz hosszabb az élettartama 9 hónapnál. Kérdés az izzók átlagos élettartama (ez az élettartam várható értéke).
Az izzók élettartamát tekintsük valószínűségi változónak, várakozási idő eloszlását kell meghatározni, ezért tételezzük fel, hogy az élettartam exponenciális eloszlású.
Ha minden negyediknek hosszabb az élettartama 9 hónapnál, akkor minden 4 izzóból 9 hónapnál rövidebb idő alatt 3 kiég. Tehát az élettartam eloszlásfüggvénye 9 hónapnál (az idő mértékegységének használjuk most a hónapot!):

$$P(X<9)=F(9)=1-e^{-l\cdot 9}=\frac{3}{4}$$

Ebből:

$$e^{-l\cdot 9}=\frac{1}{4}\Rightarrow -l\cdot 9=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow l=0{,}154$$

Ebből a várható érték:

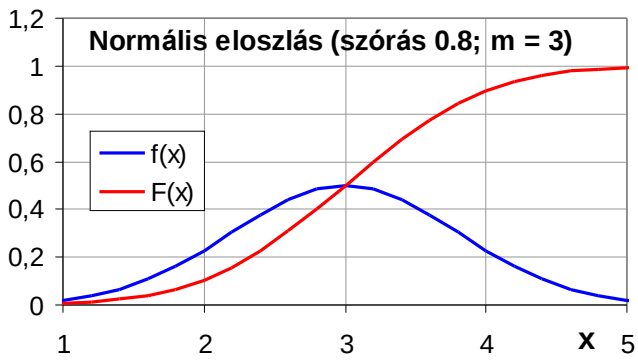
$m=\frac{1}{l}=6{,}492$, tehát az izzók jó közelítéssel átlagosan fél évig bírják.

Normális eloszlás

Sűrűségfüggvénye a következő alakú:

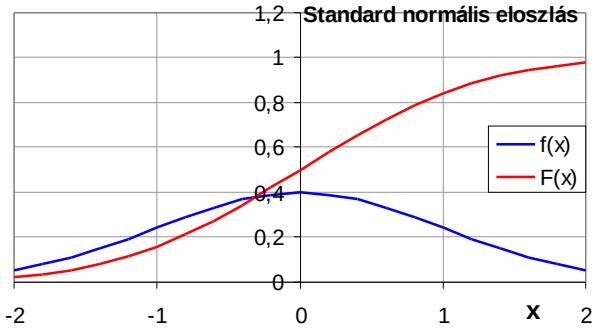
$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2p}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$$

Az eloszlás sűrűségfüggvényének paramétere a σ szórás és az m várható érték, ezeket nem kell utólag számítani. A normális eloszlás eloszlásfüggvénye nem határozható meg zárt alakban, a különböző x-hez tartozó értékeket közelítő számításokkal meghatározott táblázatokból lehet megállapítani.



PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

A normális eloszlás várható értéke a sűrűségfüggvény maximumát jelöli ki, a szórása a „púp” ’szélességét’.
Normális eloszlással modellezhetők olyan kísérletek, melyekkel célirányosan egy bizonyos eredményt akarunk elérni. Ekkor az cél körül normális eloszlással helyezkedik el az összes erdemény.
A normális eloszlás eloszlásfüggvénye csak numerikus közelítéssel határozható meg. A gyakorlatban táblázatosam megadják egy speciális esetének, a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének (Φ(x)) értékeit általában 0.01 lépésekben a különböző x értékekhez.
A **standard normális eloszlás** olyan normális eloszlás, melynek szórása 1 és várható értéke 0. Ez alapján sűrűségfüggvénye a következő alakú:



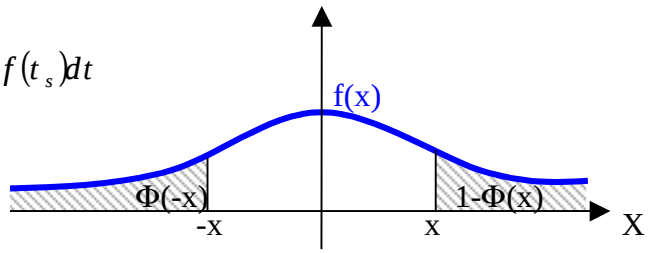
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

A sűrűségfüggvény páros függvény, ezért tetszőleges x esetén a (-∞,-x] és a [x,∞) intervallumon az integrálja (sűrűségfüggvény alatti terület) megegyezik.

$$\int_{-\infty}^{-x} f(t_s)dt = \int_{x}^{\infty} f(t_s)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_s)dt - \int_{-\infty}^{x} f(t_s)dt$$

Továbbá:

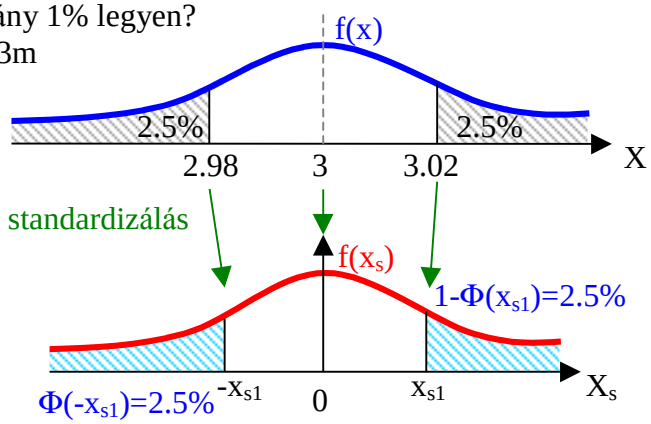
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t_s)dt = 1$$



Ezért Φ(-x) = 1-Φ(x)
A fenntiek miatt a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét csak pozitív x-re adják meg, a negatívra a fenti formula alapján számítható.
Ha normális eloszlású jelenséget kell feldolgozni, az eloszlást standardizálni kell. El kell érni, hogy sűrűségfüggvénye 0-nál érje el a maximumát (x-ből levonjuk a várható értéket, így a maximum a 0-hoz tolódik), és a szórása 1 legyen (x-t el kell osztani a szórással, ekkor a „púp” összehúzódik vagy szélesedik, ’szélessége’ 1 lesz). Ez már standard normális eloszlásként kezelhető, érvényesek rá a tálbázatok.
Pl: Egy üzemben 3m hosszú deszkát gyártanak. Az előírt pontosság 1%, tehát ±2cm, azaz a jó deszkák hossza 2.98m és 3.02m között van. Azt tudjuk még az eddigi gyártási tapasztalatból, hogy a deszkák 5%-a lesz selejtes, azaz ezen a hossztartományon kívüli. Mennyire változtassuk a pontosságot, hogy a selejtarány 1% legyen?
A deszkák hossza normális eloszlású, m = 3m várhatóértékkel. Első lépésben meg kell határoznunk a szórást. Ehhez az eloszlást standardizálni kell:

$$x_s = \frac{x-m}{s} = \frac{x-3}{s}$$

Így x_s sűrűségfüggvénye standard normális eloszlású. Meg kell keresni azt az x_{s1} értéket, amelyen kívül a standard normális eloszlás 5% valószínűséggel van.



PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Mivel a normális eloszlás szimmetrikus a várható értékre, ezért :
Felhasználva a Φ(-x) = 1-Φ(x) összefüggést:

$$\Phi(-x_{s1}) = 1 - \Phi(x_{s1}) = \frac{5\%}{2} = 2.5\% = 0.025$$

Ebből:
$\Phi(x_{s1}) = 0.975$ Táblázatból kikeresve: x_{s1}=1.96.
Ez az x_{s1}=1.96 érték az eloszlásunk 2.02 értékéhez, a -x_{s1}= -1.96 érték az eloszlásunk 1.98 értékéhez tartozik:

$$x_{s1} = 1.96 = \frac{3.02-3}{s} = \frac{0.02}{s} \Rightarrow s = \frac{0.02}{1.96} = 0.0102$$ azaz a szórás 1.02cm.

Most azt kell meghatároznunk, hogy a már ismert szórású eloszlás mekkora pontosság mellett lesz 1% valószínűséggel a pontosságon kívül. Ezt is a standardizált eloszlás vizsgálatával tudjuk meghatározni. Ismét felhasználva a Φ(-x) = 1-Φ(x) összefüggést:

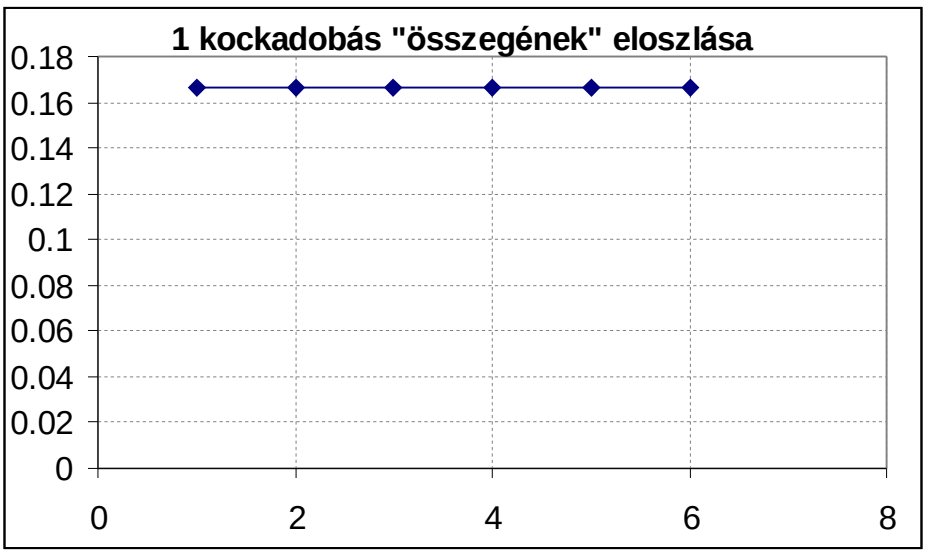
$$\Phi(-x_{s2}) = 1 - \Phi(x_{s2}) = \frac{1\%}{2} = 0.5\% = 0.005$$

Ebből:
$\Phi(x_{s2}) = 0.995$ Táblázatból kikeresve: x_{s2}=2.58. Ez az eloszlásunk ’3m+pontosság’ értékéhez tartozik.
Ebből:

$$x_{s2} = 2.58 = \frac{(3+pontossag)-3}{0.0102} = \frac{pontossag}{0.0102} \Rightarrow pontossag = 0.0102 \cdot 2.58 = 0.02632$$ azaz a pontosságot ±2cm-ről ±2.6cm-re kell változtatni.

A **centrális határeloszlástétel** azt mondja ki, hogy sok független valószínűségi változó összegének eloszlásfüggvénye közelíti a normális eloszlás eloszlásfüggvényét.

Pl. vegyünk egy egyenletes eloszlású kísérletet, az egyszerűbb számíthatóság érdekében diszkrétet: dobáljunk dobókockával. Egy dobott szám (i) valószínűsége: $\frac{1}{6}$, így a dobott szám eloszlása:



PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

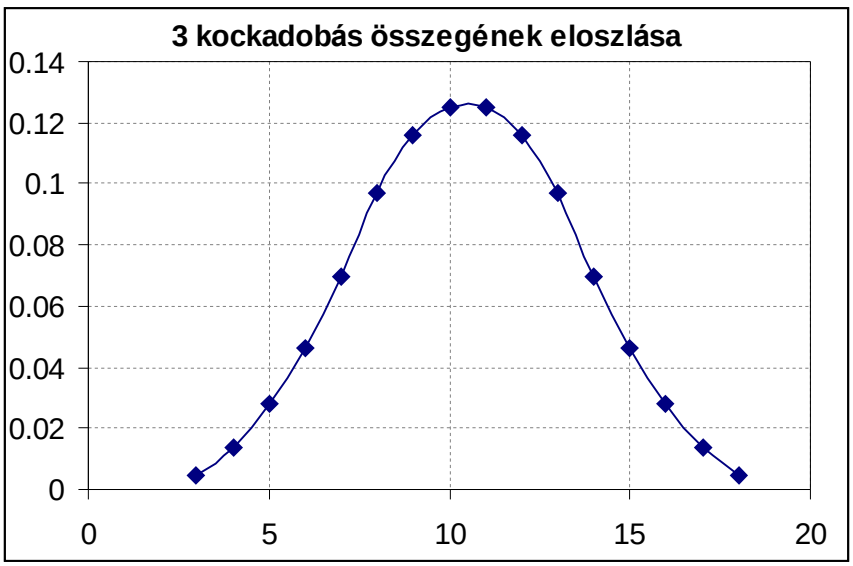
Ha azonban 3 kockával dobunk és ezek összegének eloszlását állítjuk elő, látható, hogy közelít a normális eloszláshoz.
A táblázat értelmezése:

- Első oszlopban a 3 kocka összege van
- A másodikban a adott összeg hányféle módon jöhet ki
- A harmadikban összes lehetőséghez képest meghatároztuk az adott összeg relatív gyakoriságát
- A továbbiakban az egyes összegekhez tartozó variációk és azok darabszáma látható.

Pl. a 15 mint összeg előállhat az 456 kombinációból, és ez a kombináció összesen 6 féleképpen jöhet ki (az első lehet 3 féle a második már csak 2 féle az utolsó pedig csak 1 féle, hogy az összeg 15 legyen); továbbá előállhat a 366 kombinációból, ez az ismétlés miatt csak 3 féle variációban jöhet ki; továbbá az 555 kombinációból, ami csak egyféleképpen jöhet ki.

Összeg	Lehető-ség	Relativ gyak.		Variáció	db	Variáció	db	Variáció	db	Variáció	db	Variáció	db	Variáció	db
3	1	0.0046296		111	1										
4	3	0.0138889		112	3										
5	6	0.0277778		113	3	221	3								
6	10	0.0462963		123	6	222	1	114	3						
7	15	0.0694444		124	6	133	3	223	3	511	3				
8	21	0.0972222		116	3	125	6	134	6	224	3	233	3		
9	25	0.1157407		126	6	135	6	144	3	225	3	234	6	333	1
10	27	0.125		136	6	145	6	226	3	235	6	244	3	334	3
11	27	0.125		146	6	155	3	236	6	245	6	335	3	344	3
12	25	0.1157407		156	6	246	6	255	3	336	3	345	6	444	1
13	21	0.0972222		166	3	256	6	346	6	355	3	445	3		
14	15	0.0694444		266	3	356	6	446	3	455	3				
15	10	0.0462963		366	3	456	6	555	1						
16	6	0.0277778		466	3	556	3								
17	3	0.0138889		566	3										
18	1	0.0046296		666	1										
Sum	216														

Látható, hogy a közepes összegek az egyes kockák sokkal többféle értékének kombinációjából előállíthatók, míg a szélsőségek csak az egyes kockák szélsőségeiből, amiből csak egy van (lásd 3 és 18 mint összeg). Ezért a közepes értékek valüszínűsége nagyobb.



PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com