Sorozatok

Intervallum, környezet

Intervallum:

Legyenek a és b valós számok. Ha a ≠ b akkor a,b kijelöl egy intervallumot a valós számok halmazán. Ennek elemei azok az x valós számok, ha a < b, melyekre a < x < b igaz.

Az intervallum négy típusú lehet:

Nyílt intervallum: (a, b) ∈ {a < x <b}

Zárt intervallum: [a, b] ∈ {a ≤ x ≤ b}

Jobbról zárt, balról nyílt: (a, b] ∈ {a < x ≤ b}

Balról zárt, jobbról nyílt: [a, b) ∈ {a ≤ x < b}

Ha b = ∞ vagy b = -∞, akkor:

Nyílt a, ∞ intervallum: (a, ∞) ∈ {a < x}

Zárt a, ∞ intervallum: [a, ∞) ∈ {a ≤ x}

Nyílt -∞, a intervallum: (-∞, a) ∈ {x < a}

Zárt -∞, a intervallum: (-∞, a] ∈ {x ≤ a}

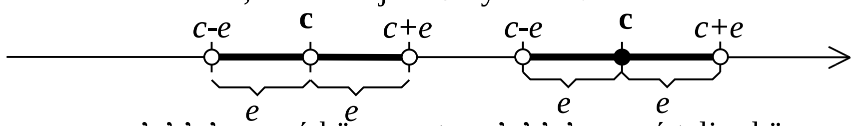
(Ha ezt az értelmezést felhasználjuk, akkor a valós számok halmaza a (-∞,∞) intervallumban van)

Környezet:

Egy c szám ε sugarú teljes környezetébe az (c - ε, c + ε) intervallum elemei tartoznak.

Egy c szám ε sugarú környezetébe az (c - ε, c) és (c, c + ε) intervallum elemei tartoznak.

Tehát a környezetbe nem tartozik bele c, csak a teljes környezetbe!



'c' 'ε' sugarú környezete 'c' 'ε' sugarú teljes környezete

Belső pont, határpont:

Vegyük [a, b] intervallumot.

[a, b]-nek c **belső pont**ja, ha c eleme [a, b]-nek (a ≤ c ≤ b), és c-nek van olyan (tetszőlegesen kis környezete), melynek minden eleme eleme az [a, b]-nek is.

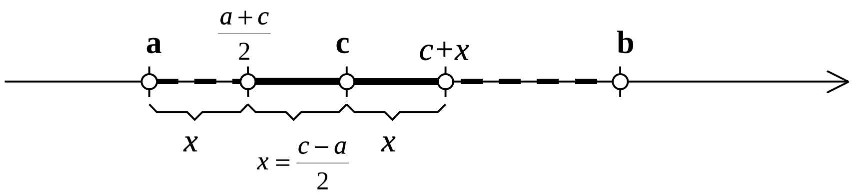
[a, b]-nek c **határpont**ja, ha c eleme [a, b]-nek (a ≤ c ≤ b), és c-nek nincs olyan (tetszőlegesen kis környezete), melynek minden eleme eleme elemei az [a, b]-nek is.

Pl. ha c ∈ [a, b], és a < c < b, akkor biztosan van olyan x szám,

melyre a < c-x < c (pl. $c - x = \frac{a+c}{2} \Rightarrow x = \frac{c-a}{2}$) ha c a-hoz van közelebb

vagy c < c+x < b (pl. $c + x = \frac{c+b}{2} \Rightarrow x = \frac{b-c}{2}$) ha c b-hez van közelebb.

Ekkor biztosan a < c-x < (c-x, c) < c < (c, c+x) < c+x < b, tehát a (c-x, c) és a (c, c+x) intervallum elemei biztosan elemei [a, b]-nek, c **belső pont** (lásd ábra).



Az [a, b] intervallumnak a és b határpontjai, mert a-nak nincs olyan bal oldali b-nek nincs olyan jobb oldali környezete, melynek elemei elemei lennének [a, b]-nek (mert (a-ε, a) < a és b < (b, b+ε)).

A sorozat

Sorozatot alkotunk, ha a természetes számok halmazának elemeihez hozzárendeljük a valós számok halmazának elemeit. A természetes szám megadja a hozzá rendelt valós szám sorszámát, azaz, hogy az hányadik helyet foglal el a sorozatban. A sorozat megadásával megadjuk azt a szabályt, amellybe az elem sorszámát behelyettesítve meghatározhatjuk az elemet.

Pl.: Ha $a_n = n^2 - 1$

$a_1 = 1^2 - 1 = 0$ $a_2 = 2^2 - 1 = 3$ $a_3 = 3^2 - 1 = 8$… $a_{10} = 10^2 - 1 = 99$… stb.

Ha a sorszám véges, akkor az elem értéke a sorszámot a szabályba helyettesítve megkapható (legyen a sorszám bármilyen nagy, a művelet elvileg elvégezhető). Sokszor van azonban szükség arra, hogy megállapítsuk, a sorozat hogyan viselkedik, ha a sorszámot minden határon túl növeljük (a későbbiekben ezt tesszük pl. függvényértékszámításkor kritikus helyeken). Ahhoz hogy ezt eldönthessük definiáljunk két fogalmat:

Korlát:

A sorozatnak FK véges szám felső korlátja, ha nincs olyan eleme amire $FK < a_n$.
A sorozatnak AK véges szám alsó korlátja, ha nincs olyan eleme amire $AK > a_n$.

A sorozat korlátos, ha van alsó **és** felső korlátja.

A sorozat
minden határon túl nő, ha nincs felső korlátja,
minden határon túl csökken, ha nincs alsó korlátja.

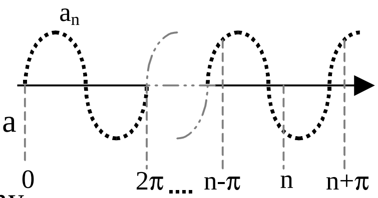
A korlátok között kiemelkedően fontos a
legkisebb felső korlát (sup $[a_n]$) és a
legnagyobb alsó korlát (inf $[a_n]$),
hiszen ha a sorozat felveszi ezeket az értékeket, akkor megadja a sorozat maximumát és minimumát.

Monotonitás:

A sorozat monoton nő, ha $a_n \le a_{n+1}$ minden n-re (ekkor $a_{n+1} - a_n > 0$).
A sorozat monoton csökken, ha $a_n \ge a_{n+1}$ minden n-re (ekkor $a_{n+1} - a_n < 0$).

A sorozat a sorszámot minden határon túl növelve alapvetően háromféleképpen viselkedhet:

- Minden határon túl nő vagy csökken.
  Pl. az említett $a_n = n^2 - 1$ sorozat minden határon túl nő, hiszen ha feltesszük, hogy FK felső korlátja, akkor az $a_n = n^2 - 1 \le FK$ egyenlőtlenség csak az első $n \le \sqrt{FK + 1}$ elemre igaz a többire nem. Tehát bármekkora véges számot válsztok felsőkorlátnak, az mindig csak a sorozat véges számú elemére igaz a többi (végtelen számú) elemre nem. Alulról viszont korlátos a sorozat, hiszen minden tagja nem negatív szám.
  Ugyanígy belátható, hogy $a_n = 1 - n^2$ sorozat minden határon túl csökken (ez az előző sorozat –1-szerese!).
- Oszcillál.
  Pl. az $a_n = \sin(n)$ sorozat a szinuszfüggvény definíciója miatt korlátos, hiszen $-1 \le a_n \le 1$. Mégsem állapítható meg, milyen értéket vesz fel, ha n-t minden határon túl növeljük, mert a szinuszfüggvény 2π-re periodikus, tehát ha n-t növeljük, akkor a függvény jellege n 2π hosszúságú környezetében $[n+\pi, n-\pi]$ hasonló, mint az n = 0 2π hosszúságú környezetében, a függvény nagy n esetén is ugyanúgy "hullámzik", így csak annyit tudunk, hogy a sorozat értéke –1 és 1 között "imbolyog". Jelen példában még csak azt sem mondhatjuk, hogy a sorozat elemeiből egy szakasz ismétlődik, mert a periódus irracionális szám, így soha nem fordulhat elő, hogy n a periódus valamelyik többszörösét adja.



Ha pl. a sorozat a_n= sin(0.1πn) lenne, akkor abban az első 20 elem ismétlődne a végtelenségig (mert $\sin((20+n)\cdot 0.1p) = \sin(n \cdot 0.1p)$).
Szintén oszcilláló sorozat az a_n= $(-1)^n$. Korlátos, mert csak két értéket vehet fel, a –1-t és az 1-t, de n-t bármilyen nagynak vehetjük fel, mindig váltakozik e két érték között.
További oszcilláló sorozat az a_n= $n(-1)^n$ is, melynek abszolút értéke minden határon túl nő, de felváltva hol "+", hol "–" értéket vesz fel.

- Konvergál.
  Szemléletesen: minél nagyobb n, annál jobban megközelít **egy** számot, így ha n minden határon túl nő, akkor a sorozat helyettesíthető ezzel a számmal.
  Pl: $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ sorozat. Minél nagyobb n, annál kevésbé különbözik egymástól n-1 és n, így hányadosuk egyre inkább egy 1-hez közeli szám. A hányados azonban mindig kisebb 1-nél, mert n-1 mindig kisebb n.

Pl. függvényvizsgálatkor nekünk az kell, hogy a függgvényt helyettesítő sorozat konvergáljon, mert ekkor azt monhatjuk, hogy ahova konvergál, azzal helyettesíthetjük a függvény értékét.
A konvergencia definícióját pontosítsuk! Ehhez egy új fogalmat értelmezünk:
Torlódási hely:

A sorozatnak „A" torlódási pontja, ha „A" tetszőlegesen kis teljes környezetében a sorozatnak végtelen sok eleme van.

Konvergens a sorozat, ha egy torlódási helye van. Ebből a definícióból:

Egy sorozat „A"-hoz konvergál („A" –hoz tart, vagy „A" a határértéke), ha „A" tetszőlegesen kis teljes környezetén kívül véges számú eleme van. (Azaz „A" és csak „A" tetszőlegesen kis teljes környezetén belül van a sorozatnak végtelen sok eleme.)

Matematikusabban leírva:

Egy sorozat „A"-hoz konvergál („A" –hoz tart), ha minden ε > 0-hoz megadható N, melyre igaz:

ha n > N, akkor $|A - a_n| < e$.

Itt $|A - a_n| < e$ „A" kis teljes környezetét, (A-ε, A+ε) intervallumot jelenti. N a környezeten kívül maradt elemek darabszáma, és az ε-hoz tartozó küszöbszámnak nevezik. Tehát a sorozat konvergál „A"-hoz, ha tetszőleges pontosság megadása mellett, mellyel a_n eltérhet „A"-tól, ki tudjuk számítani, hány elem tér el a megadott pontosságnál jobban.

Ha egy **sorozat nem konvergens, akkor divergens** (minden határon túl nő-csökken, vagy oszcillál).
Példák:

- Az a_n = n-1 sorozat divergens, mert nincs véges felső korlátja és így minden határon túl nő.
- Az a_n= $(-1)^n$ sorozat divergens, mert két torlódási pontja van: a sorozatnak végtelen sok –1 és végtelen sok 1 eleme van.
- Az $a_n = \dfrac{n-1}{n}$ sorozat konvergens. Azt már korábban láttuk, hogy a_n 1-t fogja megközelíteni, valószínűleg ez lesz a határértéke.
  Nézzük meg, kiszámítható-e
  $|A - a_n| = \left|1 - \dfrac{n-1}{n}\right| < e$ egyenletből ε megadásával az az N, melynél nagyobb n-re igaz az egyenlőtlenség.

$$\left|1-\frac{N-1}{N}\right| = \left|\frac{N-(N-1)}{N}\right| = \left|\frac{1}{N}\right| < e \text{ mivel n > 0, } \frac{1}{e} < N$$

Tehát, ha $n > N > \frac{1}{e}$, akkor az egyenlőtlenség igaz, maximum N elem tér el ε-nál jobban 1-től.

A konvergencia vizsgálatához hasznos tétel (bizonyítás nélkül):

Egy sorozat konvergens, ha

- Monoton nő és felülről korlátos
- Monoton csökken és alulról korlátos.

-ekkor határértéke a korlátja.

Pl. az $a_n = \frac{n^2+n}{n^2}$ sorozatnál tetszőleges n-re:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{(n+1)^2} - \frac{n^2+n}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2 + n^2 n + n^2 - (n+1)^2 n^2 - (n+1)^2 n}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^2(n^2+2n+1) + n^3 + n^2 - (n^2+2n+1)n^2 - (n^2+2n+1)n}{n^2(n+1)^2}$$

A nevező mindig pozitív (mert négyzetszámok szorzata). A számláló:

$$(n^4 + 2n^3 + n^2) + n^3 + n^2 - (n^4 + 2n^3 + n^2) - (n^3 + 2n^2 + n) = n^3 + n^2 - (n^3 + 2n^2 + n) =$$

$$= -n^2 - n < 0$$

Így $a_{n+1} - a_n < 0$ tehát az a_n sorozat monoton csökkenő.

Megállapítható továbbá, hogy a sorozatnak csak pozitív elemei vannak ($a_n > 0$, mert mind a nevező, mind a számláló pozitív), ezért a ’0’ a sorozatnak alsó korlátja (még ha nem is ez a legnagyobb alsó korlát); tehát a sorozat konvergens.

A fenti tétel hátránya, hogy csak a konvergencia ténye állapítható meg segítségével, a határérték nem.

Szintén a konvergencia vizsgálatához hasznos tétel (bizonyítás nélkül):

Ha egy a_n sorozatról nem tudjuk eldönteni, hogy konvergens-e, de találunk olyan b_n, c_n sorozatokat, melyekre igaz minden elemre, vagy egy véges sorszámú elemtől kezdődően:

$a_n \le b_n$, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = H$ valamint $c_n \le a_n$, és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = H$

Tehát a sorozatnál nagyobb és a sorozatnál kisebb sorozat is ugyanoda tart, ha n minden határon túl nő, ekkor a_n is konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = H$ (*Rendőr elv: ha melletted két oldalról áll egy-egy rendőr (le vagy tartóztatva) és mind e kettő ugyanoda megy, akkor te is csak ugyanoda tudsz menni*)

Műveletek sorozatokkal (bizonyítás nélkül)

Ha adottak a_n és b_n konvergens sorozatok, melyeknek határértéke A és B, akkor:

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

$\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot A$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n{}^k) = A^k$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}\Big| ha\_B \ne 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[k]{a_n}\right) = \sqrt[k]{A}\Big| ha\_a_n \ge 0; A \ge 0$

Nevezetes sorozatok

Léteznek bizonyos elemi sorozatok, melyeknek határértékét már korábban kiszámították, és amelyekből a legtöbb sorozat felépíthető.

$\lim\limits_{n\to\infty}(c) = c$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(q^n) = \begin{cases} 0 \mid ha\_q < 1 \\ 1 \mid ha\_q = 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{c}\right) = 1 \mid ha\_c > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}(n) = \infty$, azaz nincs véges határérték

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$

Példák, megoldási módszerek

Racionális tört (polinomok hányadosa):

$a_n = \dfrac{sz_k \cdot n^k + sz_{k-1} \cdot n^{k-1} + \ldots + sz_1 \cdot n + sz_0}{h_g \cdot n^g + h_{g-1} \cdot n^{g-1} + \ldots + h_1 \cdot n + h_0}$ és meg kell állapítanunk a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = A$ határértéket.

A számláló n-nek k-adfokú polinomja, a nevező n-nek g-edfokú polinomja. Megoldásához szorozzuk be a számlálót és a nevezőt $\frac{1}{n^g}$-vel.

$$a_n = \frac{sz_k \cdot n^k + sz_{k-1} \cdot n^{k-1} + \ldots + sz_1 \cdot n + sz_0}{h_g \cdot n^g + h_{g-1} \cdot n^{g-1} + \ldots + h_1 \cdot n + h_0} \cdot 1 = \frac{sz_k \cdot n^k + sz_{k-1} \cdot n^{k-1} + \ldots + sz_1 \cdot n + sz_0}{h_g \cdot n^g + h_{g-1} \cdot n^{g-1} + \ldots + h_1 \cdot n + h_0} \cdot \frac{\frac{1}{n^g}}{\frac{1}{n^g}}$$

$$a_n = \frac{sz_k \cdot \frac{n^k}{n^g} + sz_{k-1} \cdot \frac{n^{k-1}}{n^g} + \ldots + sz_1 \cdot \frac{n}{n^g} + \frac{sz_0}{n^g}}{h_g \cdot \frac{n^g}{n^g} + h_{g-1} \cdot \frac{n^{g-1}}{n^g} + \ldots + h_1 \cdot \frac{n}{n^g} + \frac{h_0}{n^g}}$$

$$a_n = \frac{sz_k \cdot \frac{1}{n^{g-k}} + sz_{k-1} \cdot \frac{1}{n^{g-k+1}} + \ldots + sz_1 \cdot \frac{1}{n^{g-1}} + sz_0 \cdot \frac{1}{n^g}}{h_g + h_{g-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + h_1 \cdot \frac{1}{n^{g-1}} + h_0 \cdot \frac{1}{n^g}}$$

A határértéket képezve:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{sz_k \cdot \frac{1}{n^{g-k}} + sz_{k-1} \cdot \frac{1}{n^{g-k+1}} + \ldots + sz_1 \cdot \frac{1}{n^{g-1}} + sz_0 \cdot \frac{1}{n^g}}{h_g + h_{g-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots + h_1 \cdot \frac{1}{n^{g-1}} + h_0 \cdot \frac{1}{n^g}}\right)$$

Ez egy összetett sorozat, mégpedig konstanssal szorzott sorozatok összegének hányadosa. Felhasználhatjuk az ezekre a műveletekre érvényes szabályokat, így az egyes részsorozatok helyett behelyettesíthetjük a határértékeiket.

A nevező:

$$\lim_{n\to\infty}\left(h_g + h_{g-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + h_1\cdot\frac{1}{n^{g-1}} + h_0\cdot\frac{1}{n^g}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(h_g) + \lim_{n\to\infty}\left(h_{g-1}\cdot\frac{1}{n}\right) + \ldots + \lim_{n\to\infty}\left(h_1\cdot\frac{1}{n^{g-1}}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(h_0\cdot\frac{1}{n^g}\right)$$

A nevezetes sorozatok alapján $\lim_{n\to\infty}(c) = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(h_g) = h_g$ és

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ ezért $\frac{1}{n}$ hatványainak is 0 a határértéke. Így a nevező határértéke:

$$\lim_{n\to\infty}\left(h_g + h_{g-1}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + h_1\cdot\frac{1}{n^{g-1}} + h_0\cdot\frac{1}{n^g}\right) = h_g + 0 + \ldots + 0 + 0 = h_g$$

A számlálónak, fokszámától függően, három határértéke lehet:

- Ha a számláló fokszáma kisebb a nevezőénél (g>k), csak $\frac{1}{n}$ hatványai szerepelnek benne, a határértéke nulla, így a sorozat határértéke is nulla (4. oldal):
$$\lim_{n\to\infty}\left(sz_k\cdot\frac{1}{n^{g-k}} + sz_{k-1}\cdot\frac{1}{n^{g-k+1}} + \ldots + sz_1\cdot\frac{1}{n^{g-1}} + h_0\cdot\frac{1}{n^g}\right) = 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{0}{h_g}$$
- Ha a számláló fokszáma egyenlő a nevezőével (g=k), a határértéke sz_k:
$$\lim_{n\to\infty}\left(sz_k\cdot\frac{1}{n^0} + sz_{k-1}\cdot\frac{1}{n^1} + \ldots + sz_1\cdot\frac{1}{n^{g-1}} + h_0\cdot\frac{1}{n^g}\right) = sz_k + 0 + \ldots + 0 + 0 = sz_k$$ a sorozat határértéke : $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{sz_k}{h_g}$
- Ha a számláló fokszáma nagyobb nevezőénél (g<k), a számlálóban n hatványai is szerepelnek, melynek nem létezik véges határértéke; így se a számlálónak, se a sorozatnak nincs véges határértéke (4. oldal):
$$\lim_{n\to\infty}\left(sz_k\cdot\frac{1}{n^{g-k}} + sz_{k-1}\cdot\frac{1}{n^{g-k+1}} + \ldots + sz_1\cdot\frac{1}{n^{g-1}} + h_0\cdot\frac{1}{n^g}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(sz_k\cdot n^{k-g} + sz_{k-1}\cdot n^{k-g-1} + \ldots + sz_1\cdot\frac{1}{n^{g-1}} + h_0\cdot\frac{1}{n^g}\right)(= \infty + \infty + \ldots + sz_g + 0 + \ldots + 0 = \infty)$$

Például:

1:

$$a_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 5n - 7}{2n^4 - 9n^3 - 5n^2 + 2n + 7} \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n) = A = ?$$
$$a_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 5n - 7}{2n^4 - 9n^3 - 5n^2 + 2n + 7}\cdot\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{-3\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n^2} + 5\cdot\frac{1}{n^3} - 7\cdot\frac{1}{n^4}}{2 - 9\cdot\frac{1}{n} - 5\cdot\frac{1}{n^2} + 2\cdot\frac{1}{n^3} + 7\cdot\frac{1}{n^4}}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n^2} + 5\cdot\frac{1}{n^3} - 7\cdot\frac{1}{n^4}}{2 - 9\cdot\frac{1}{n} - 5\cdot\frac{1}{n^2} + 2\cdot\frac{1}{n^3} + 7\cdot\frac{1}{n^4}}\right) = \frac{-0 + 0 + 0 - 0}{2 - 0 - 0 + 0 + 0} = 0$$

2:

$$a_n = \frac{-8n^4 - 3n^3 + 2n^2 + 5n - 7}{2n^4 - 9n^3 - 5n^2 + 2n + 7} \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n) = A = ?$$

$$a_n = \frac{-8n^4 - 3n^3 + 2n^2 + 5n - 7}{2n^4 - 9n^3 - 5n^2 + 2n + 7} \cdot \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{-8 - 3\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n^2} + 5\cdot\frac{1}{n^3} - 7\cdot\frac{1}{n^4}}{2 - 9\cdot\frac{1}{n} - 5\cdot\frac{1}{n^2} + 2\cdot\frac{1}{n^3} + 7\cdot\frac{1}{n^4}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-8 - 3\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n^2} + 5\cdot\frac{1}{n^3} - 7\cdot\frac{1}{n^4}}{2 - 9\cdot\frac{1}{n} - 5\cdot\frac{1}{n^2} + 2\cdot\frac{1}{n^3} + 7\cdot\frac{1}{n^4}}\right) = \frac{-8 - 0 + 0 + 0 - 0}{2 - 0 - 0 + 0 + 0} = -4$$

3:

$$a_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 5n - 7}{-5n^2 + 2n + 7} \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n) = A = ?$$

$$a_n = \frac{-3n^3 + 2n^2 + 5n - 7}{-5n^2 + 2n + 7} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{-3\cdot n + 2 + 5\cdot\frac{1}{n} - 7\cdot\frac{1}{n^2}}{-5 + 2\cdot\frac{1}{n} + 7\cdot\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3\cdot n + 2 + 5\cdot\frac{1}{n} - 7\cdot\frac{1}{n^2}}{-5 + 2\cdot\frac{1}{n} + 7\cdot\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{-\infty + 2 + 0 + 0}{-5 + 0 + 0} (= \infty)$$

Hasonló módszerrel lehet **racionális hatványtört** határértékét számítani:

$a_n = \dfrac{c_1 \cdot sz^n + c_2}{c_3 \cdot h^n + c_4}$; sz > 1, h > 1; és meg kell állapítanunk a $\lim_{n\to\infty}(a_n) = A$ határértéket.

Szorozzuk be a számlálót és a nevezőt $\dfrac{1}{h^n}$-vel:

$$a_n = \frac{c_1 \cdot sz^n + c_2}{c_3 \cdot h^n + c_4} \cdot 1 = \frac{c_1 \cdot sz^n + c_2}{c_3 \cdot h^n + c_4} \cdot \frac{\frac{1}{h^n}}{\frac{1}{h^n}} = \frac{c_1 \cdot \frac{sz^n}{h^n} + c_2 \cdot \frac{1}{h^n}}{c_3 \cdot \frac{h^n}{h^n} + c_4 \cdot \frac{1}{h^n}} = \frac{c_1 \cdot \left(\frac{sz}{h}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1}{h}\right)^n}{c_3 + c_4 \cdot \left(\frac{1}{h}\right)^n}$$

$$h > 1 \Rightarrow \frac{1}{h} < 1 \text{ így} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{h}\right)^n = 0 \qquad (\textit{4. oldal})$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_1 \cdot \left(\frac{sz}{h}\right)^n + 0}{c_3 + 0}\right) = \frac{c_1}{c_3} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{sz}{h}\right)^n\right)$$

Az $\dfrac{sz}{h}$ értéktől függően a határérték szintén háromféle határértéke lehet (4. oldal).

- Ha $\dfrac{sz}{h} < 1$, a határérték 0
- Ha $\dfrac{sz}{h} = 1$, a határérték $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \dfrac{c_1}{c_3}$

- Ha $\frac{sz}{h} > 1$, nincs véges határétrék

Példák:

1:

$a_n = \frac{3\cdot 2^n + 6}{5^{n+2} + 7}$; és meg kell állapítanunk a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = A$ határértéket.

$$a_n = \frac{3\cdot 2^n + 6}{5^{n+2} + 7} = \frac{3\cdot 2^n + 6}{25\cdot 5^n + 7} = \frac{3\cdot 2^n + 6}{25\cdot 5^n + 7}\cdot 1 = \frac{3\cdot 2^n + 6}{25\cdot 5^n + 7}\cdot\frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^n}} = \frac{3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n + 6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{25 + 7\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n + 6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{25 + 7\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}\right) = \frac{0+0}{25+0} = 0$$

2:

$a_n = \frac{3\cdot 5^n + 6}{5^{n+2} + 7}$; és meg kell állapítanunk a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = A$ határértéket.

$$a_n = \frac{3\cdot 5^n + 6}{5^{n+2} + 7} = \frac{3\cdot 5^n + 6}{25\cdot 5^n + 7} = \frac{3\cdot 5^n + 6}{25\cdot 5^n + 7}\cdot 1 = \frac{3\cdot 5^n + 6}{25\cdot 5^n + 7}\cdot\frac{\frac{1}{5^n}}{\frac{1}{5^n}} = \frac{3 + 6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{25 + 7\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3 + 6\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{25 + 7\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}\right) = \frac{3+0}{25+0} = \frac{3}{25}$$

3:

$a_n = \frac{3\cdot 5^n + 6}{3^{n+2} + 7}$; és meg kell állapítanunk a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = A$ határértéket.

$$a_n = \frac{3\cdot 5^n + 6}{3^{n+2} + 7} = \frac{3\cdot 5^n + 6}{9\cdot 3^n + 7} = \frac{3\cdot 5^n + 6}{9\cdot 3^n + 7}\cdot 1 = \frac{3\cdot 5^n + 6}{9\cdot 3^n + 7}\cdot\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n + 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{9 + 7\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n + 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{9 + 7\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right) = \frac{3\cdot\infty + 0}{9+0}(=\infty)$$

¥-¥ típusú feladatok:

1:

$a_n = \sqrt{n^2 + 8} - \sqrt{n^2 - 5}$ meg kell állapítanunk a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = A$ határértéket.

Itt felhasználjuk az $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ azonosságot.

$$a_n=\left(\sqrt{n^2+8}-\sqrt{n^2-5}\right)\cdot 1=\left(\sqrt{n^2+8}-\sqrt{n^2-5}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{n^2-5}}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{n^2-5}}$$

$$a_n=\frac{n^2+8-\left(n^2-5\right)}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{n^2-5}}=\frac{n^2+8-n^2+5}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{n^2-5}}=\frac{13}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{n^2-5}}$$

Most a nevezőben a gyökjelek alól emeljünk ki az n^2-t!

$$a_n=\frac{13}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}}=\frac{13}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}+\sqrt{n^2}\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}}=\frac{13}{n\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}+n\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13}{n\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}+n\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13}{n\sqrt{1+0}+n\sqrt{1-0}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13}{n\sqrt{1}+n\sqrt{1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13}{2n}\right)=0$$

2:

$a_n=\sqrt{n^2+8}-\sqrt{3n^2-5}$ meg kell állapítanunk a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=A$ határértéket.

Itt is felhasználjuk az $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$ azonosságot.

$$a_n=\left(\sqrt{n^2+8}-\sqrt{3n^2-5}\right)\cdot 1=\left(\sqrt{n^2+8}-\sqrt{3n^2-5}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{3n^2-5}}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{3n^2-5}}$$

$$a_n=\frac{n^2+8-\left(3n^2-5\right)}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{3n^2-5}}=\frac{n^2+8-3n^2+5}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{3n^2-5}}=\frac{13-2n^2}{\sqrt{n^2+8}+\sqrt{3n^2-5}}$$

Most a nevezőben a gyökjelek alól emeljünk ki az n^2-t!

$$a_n=\frac{13-2n^2}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(3-\frac{5}{n^2}\right)}}=\frac{13-2n^2}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}+\sqrt{n^2}\sqrt{3-\frac{5}{n^2}}}=\frac{13-2n^2}{n\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}+n\sqrt{3-\frac{5}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13-2n^2}{n\sqrt{1+\frac{8}{n^2}}+n\sqrt{3-\frac{5}{n^2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13-2n^2}{n\sqrt{1+0}+n\sqrt{3-0}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13-2n^2}{n\sqrt{1}+n\sqrt{3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13-2n^2}{\left(1+\sqrt{3}\right)n}\right)$$

Mint a racionális törteknél:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13-2n^2}{\left(1+\sqrt{3}\right)n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13-2n^2}{\left(1+\sqrt{3}\right)n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13\cdot\frac{1}{n}-2n}{\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{0-2n}{\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)=\frac{0-\infty}{\left(1+\sqrt{3}\right)}(=-\infty)$$

3:

$a_n=\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2-5}$ meg kell állapítanunk a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=A$ határértéket.

Itt is felhasználjuk az $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$ azonosságot.

$$a_n=\left(\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2-5}\right)\cdot 1=\left(\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2-5}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-5}}{\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-5}}$$

$$a_n=\frac{n^2+8n-\left(n^2-5\right)}{\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-5}}=\frac{n^2+8n-n^2+5}{\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-5}}=\frac{8n+5}{\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2-5}}$$

Most a nevezőben a gyökjelek alól emeljünk ki az n^2-t!

$$a_n = \frac{8n+5}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{8}{n}\right)}+\sqrt{n^2\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}} = \frac{8n+5}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\sqrt{n^2}\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}} = \frac{8n+5}{n\sqrt{1+\frac{8}{n}}+n\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+5}{n\sqrt{1+\frac{8}{n}}+n\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+5}{n\sqrt{1+0}+n\sqrt{1-0}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+5}{n\sqrt{1}+n\sqrt{1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+5}{2n}\right)$$

Mint a racionális törteknél:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+5}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+5}{2n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8+5\cdot\frac{1}{n}}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8+0}{2}\right) = 4$$

Egy tipikus „állatorvosi beteg ló” példa:

$a_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{5+3\sqrt[n]{7n}}$ meg kell állapítanunk a $\lim_{n\to\infty}(a_n) = A$ határértéket.

Bontsuk részletsorozatokra (4. oldal):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2 \approx 7.34$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{7n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{7}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

Így a határérték:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \frac{0+e^2}{5+3} \approx 0.918$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin(n)}{n}\right)$ A sin(n) ugyan nem konvergens sorozat de korlátos, tehát $-1 \le \sin(n) \le 1$

Ez alapján a $b_n = \dfrac{1}{n} \ge a_n$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; továbbá $c_n = \dfrac{-1}{n} \le a_n$ és $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

A rendőrelv miatt így: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$