Komplex számok

A komplex számok származtatása:

Vannak másodfokú egyenletek, melyeknek nincs valós megoldása. Ha önmagában csak emiatt vezették volna be a komplex számokat, akkor mindmáig csak a matematikusok játszadoznának vele, de néhány fizikai probléma vizsgálatakor látszott, hogy az életben valahogy mégis megoldódik egy ilyen egyenlet és működik a lendéscsilapító, folyik az áram, stb.
Nézzünk egy ilyen esetet:

$$ax^2 + bx + c = x^2 + x + 4.25 = 0$$

Ennek megoldásai:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-17}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-1 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = -0.5 \pm 2\sqrt{-1}$$

Ezt csak akkor tudjuk értelmezni, ha úgy fogjuk fel, hogy létezik egy szám, ami nem valós szám, és négyzetre emelve –1-t ad. Ezt a továbbiakban képzetes egységnek nevezzük és $\sqrt{-1} = i$-vel jelöljük.
A megoldások ezek szerint összetett (komplex) számok, melyeknek van egy valós és egy képzetes tagja (része). A tagonként megadott ($z = a + b \cdot i$) komplex számot algebrai alakban megadott komplex számnak hívjuk.
Hogy a kapott megoldásokat hogyan kell értelmezni azt meglátjuk később.

Matematikai műveletek komplex számokkal algebrai alakban

Ha $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$

Összeadás (a valós részt a valós résszel, a képzetes részt a képzetes résszel kell összegezni):

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

Kivonás (a valós részből a valós részt, a képzetes részből a képzetes részt kell kivonni):

$$z_1 + z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$$

A komplex szám konjugáltja ($\bar{z}$):

A konjugált ($\bar{z}$) az a komplex szám amelyiknek képzetes tagja megegyezik z képzetes tagjának –1-szeresével. Ezt a számot z-hez hozzáadva, az eredmény valós lesz.
Ha $z = a + bi$, akkor a konjugált $\bar{z} = a - bi$, mert $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$.

Szorzás (minden tagot minden taggal):

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$$

mivel $i^2 = -1$ a definíció alapján:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$$

Osztás (a nevező konjugáltjával szorozzuk a számlálót és a nevezőt):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot 1 = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2}{a_2^{\ 2} - a_2 b_2 i + a_2 b_2 i - (b_2 i)^2}$$

mivel $i^2 = -1$ a definíció alapján:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i}{a_2^{\ 2} - b_2^{\ 2} i^2} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} - \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_2^{\ 2} + b_2^{\ 2}} i$$

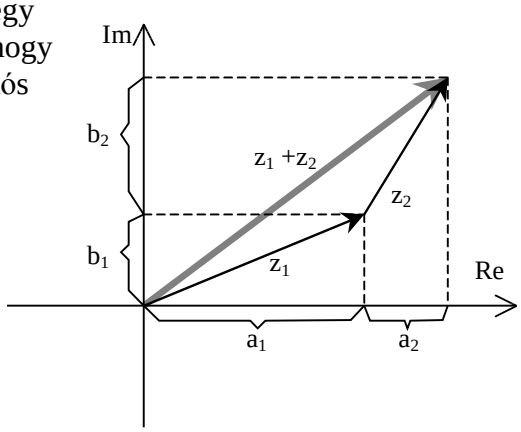
PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Szorzás valós számmal:

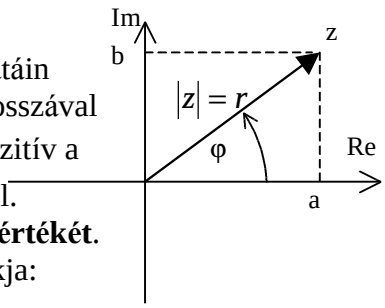
$$c \cdot z_1 = c \cdot (a_1 + b_1 i) = c \cdot a_1 + c \cdot b_1 i$$

A komplex szám polárkordinátás alakja

Láthattuk, hogy a komplex szám tulajdonképpen egy számpár, egy rendezett számkettős. Azt is láttuk, hogy komplex számok összeadásakor-kivonásakor a valós részt a valós résszel, a képzetes részt a képzetes résszel kell összegezni-kivonni.
A síkvektorok szintén számkettősök, két vektort összegezni-kivonni szintén komponesenként kell.
A komplex számokat ezért síkvektorokkal lehet szemléltetni: a függőleges tengelyre a képzetes (Im = imaginar) tagot, a vízszintes tengelyre a valós (Re = real) tagot mérjük fel. Pl. a $z_1 = a_1 + b_1 i$ és a $z_2 = a_2 + b_2 i$ komplex számok összegzését elvégezhetjük vektorosan:



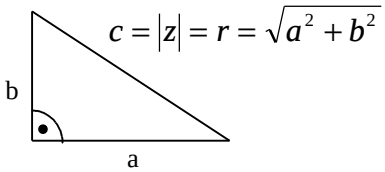
A komplex számot szemléltető vektort a Descartes-i kordinátáin kívül megadjuk a polárkordinátáival, az origóból a vektor hosszával ($|z|$ = r) és a vektor valós tengellyel bezárt szögével (j). Pozitív a szög ha az óramutató járásával ellentétes irányban mértük fel.



A **vektor hosszá**val definiálják a z komplex szám **abszolút értékét**.
Tehát a komplex szám két főbb, egymással egyenértékű alakja:

Algebrai alak: $z = a + bi$

Polárkordinátás alak: z = ($|z|$; φ) = (r ; φ)



Átváltás a két alak között:

Algebraiból polárosba:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ a Pitagorasz tétel alapján. (megjegyzés:1: z és $\bar{z}$ abszolút értéke egyenlő; 2: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-a)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} \neq \sqrt{a^2 + (bi)^2}$, tehát a képletbe **nincs i** írva!!)

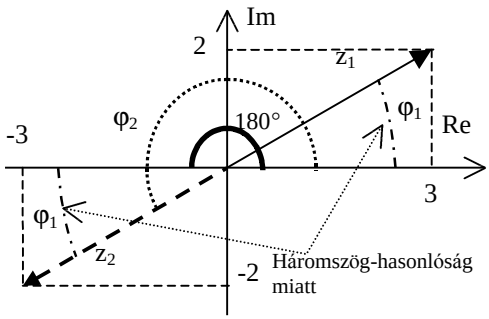
$$\operatorname{tg} j = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} j = ar\operatorname{ctg}\left.\frac{b}{a}\right|_{a>0} \\ j = 180° + ar\operatorname{ctg}\left.\frac{b}{a}\right|_{a<0} \end{cases} \quad \text{illetve radiánban} \quad \begin{cases} j = ar\operatorname{ctg}\left.\frac{b}{a}\right|_{a>0} \\ j = p + ar\operatorname{ctg}\left.\frac{b}{a}\right|_{a<0} \end{cases}$$

Pl. ha $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -3 - 2i$

$$\operatorname{tg} j_1 = \frac{2}{3} = \operatorname{tg} j_2 = \frac{-2}{-3} \text{ de}$$

$$j_1 = ar\operatorname{ctg}\frac{2}{3} = 33.7° = 0.58rad$$

$$j_2 = 180° + ar\operatorname{ctg}\frac{2}{3} = 213.7° = 3.73rad$$



Polárosból algebraiba:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$\cos j = \frac{a}{r}$ és $\sin j = \frac{b}{r}$ a szögfüggvények definíciójából.

$z = a + bi = r \cdot \cos j + i \cdot r \cdot \sin j = r \cdot (\cos j + i \cdot \sin j)$

$z = r \cdot (\cos j + i \cdot \sin j)$ ezt **trigonometrikus alak**nak hívják.

Szögek átváltása

A teljes kör fokban 360°, radiánban 2π. Aránypárokból:

Radiánból fokba: $j\,[°] = \frac{j\,[rad] \cdot 180°}{p}$

Fokból radiánba: $j\,[rad] = \frac{j\,[°] \cdot p}{180°}$

Matematikai műveletek komplex számokkal polárkordinátás alakban:

Ha $z_1 = (r_1; j_1)$ és $z_2 = (r_2; j_2)$

Összeadás, kivonás:

Az összeadás, kivonás csak algebrai alakban végezhető el!!!

Szorzás:

$z_1 \cdot z_2 = ((r_1 \cdot r_2); (j_1 + j_2))$

Trigonometrikus alakban:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(j_1 + j_2) + i \cdot \sin(j_1 + j_2))$

Osztás:

$\frac{z_1}{z_2} = \left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right); (j_1 - j_2)\right)$

Trigonometrikus alakban:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(j_1 - j_2) + i \cdot \sin(j_1 - j_2))$

Szorzás valós számmal:

$c \cdot z = c \cdot (r; j) = ((c \cdot r); j)$

Trigonometrikus alakban:

$c \cdot z = c \cdot r \cdot (\cos j + i \cdot \sin j)$

A polárkordinátás alakban a fenti szabályok felhasználásával összeszorozva/elosztva két komplex számot, az eredmény bizonyíthatóan megegyezik azzal (lásd később), ha algebrai alakban végeztük volna el a műveletet. Ennek bizonyítására most nem térek ki, a lényeg az, hogy a fenti szabályok ebből származnak.

Hatványozás:

$z^n = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \left(\left(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n\right); \left(j_1 + j_2 + \ldots + j_n\right)\right) = (r^n; (n \cdot j))$

Trigonometrikus alakban:

$z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot j) + i \cdot \sin(n \cdot j))$

Gyökvonás:

$\sqrt[n]{z} = z_0 = (r_0; j_0)$ az a komplex szám, melyre $z_0^{\,n} = z$ teljesül.

$z = (r; j) = ((r_0^{\,n}); (n \cdot j_0)) = z_0$ Ebből:

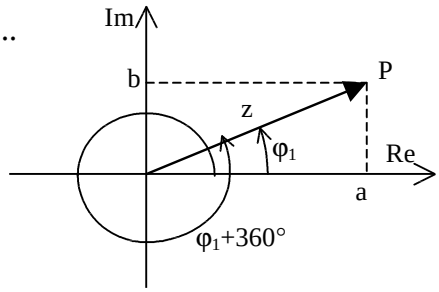
$r = r_0^{\,n} \Rightarrow r_0 = \sqrt[n]{r}$

$j = n \cdot j_0 \Rightarrow j_0 = \frac{j}{n}$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Mivel j -t, $j+360°$ -t, $j+720°$ -t, …, $j+k\cdot 360°; k\in N$ -t nem tudjuk megkülönböztetni egymástól, azok a φ_0-k is jó megoldások, melyekre:

$$\underset{k=0,1,2,3,\ldots}{j+k\cdot 360°}=n\cdot j_0 \Rightarrow j_0=\frac{j}{n}+\frac{k\cdot 360°}{n}; k=01,2,3,\ldots$$



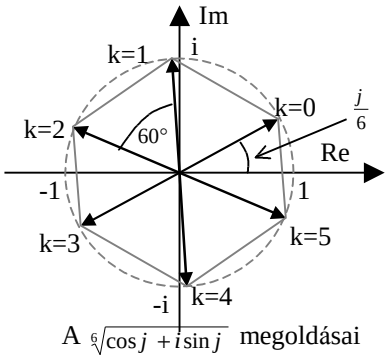
Látható, hogy a gyökvonásnak végtelen sok megoldása van, de ezek között csak n db különböző van. Ez könnyen belátható, hiszen k = n nél:

$$j_0=\frac{j}{n}+\underset{k=n}{\frac{k\cdot 360°}{n}}=\frac{j}{n}+360°=\frac{j}{n}=\frac{j}{n}+\underset{k=0}{\frac{k\cdot 360°}{n}}$$

Tehát k = n esetén ugyanazt az eredményt kapjuk, mint k = 0-nál. Ha k > n, k mindig felbontható n többszörösének és egy m < n maradéknak az összegére: $k=(1,2,3\ldots)\cdot n+m$, n többszöröse 360° többszörösét adja hozzá φ_0-hoz, ezért $j_0[k]=j_0[m]$

A gyökvonás eredménye:

$$\sqrt[n]{z}=\left(\sqrt[n]{r};\left(\underset{k=0,1,2,\ldots n-1}{\frac{j}{n}+\frac{k\cdot 360°}{n}}\right)\right)=\left(\sqrt[n]{r};\left(\underset{k=0,1,2,\ldots n-1}{\frac{j}{n}+\frac{k\cdot 2p}{n}}\right)\right)$$



A $\sqrt[6]{\cos j+i\sin j}$ megoldásai és a szabályos hatszög.

Trigonometrikus alakban:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\underset{k=0,1,2,\ldots n-1}{\frac{j}{n}+\frac{k\cdot 360°}{n}}\right)+i\cdot\sin\left(\underset{k=0,1,2,\ldots n-1}{\frac{j}{n}+\frac{k\cdot 360°}{n}}\right)\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\underset{k=0,1,2,\ldots n-1}{\frac{j}{n}+\frac{k\cdot 2p}{n}}\right)+i\cdot\sin\left(\underset{k=0,1,2,\ldots n-1}{\frac{j}{n}+\frac{k\cdot 2p}{n}}\right)\right)$$

A gyökök abszolút értéke tehát megegyezik, két szomszédos közt $\frac{360°}{n}$ illetve $\frac{2p}{n}$ szög van, ezért az origó körül egy $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön egy szabályos n-szög csúcspontjait adják meg..

A komplex szám exponenciális alakja

A pontos matematikai bizonyítások mellőzésével mutatom be az exponenciális alakot. Vegyünk két exponenciális alakú (valós) számot: $s_1=R_1e^{x_1}$; $s_2=R_2e^{x_2}$. Nevezzük *R*-t amplitúdónak, *x*-t pedig exponensnek.

A két szám szorzata:

$$s_1\cdot s_2=R_1e^{x_1}R_2e^{x_2}=R_1R_2e^{x_1+x_2}$$

A két szám hányadosa:

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{R_1e^{x_1}}{R_2e^{x_2}}=\frac{R_1}{R_2}e^{x_1-x_2}$$

Hatványozás:

$$s_1{}^n=\left(R_1e^{x_1}\right)^n=R_1{}^ne^{(n\cdot x_1)}$$

Gyökvonás:

$$\sqrt[n]{s_1}=\sqrt[n]{R_1e^{x_1}}=\sqrt[n]{R_1}e^{\left(\frac{x_1}{n}\right)}$$

Láthatjuk, hogy az exponenciális alakú (valós) szám amplitúdója ugyanúgy viselkedik, mint a poláros alakú komplex szám abszolút értéke; az exponenciális alakú (valós) szám exponense ugyanúgy viselkedik, mint a poláros alakú komplex szám szöge, ha a fenti műveleteket végezzük el rajta (kivétel a gyökvonás, ekkor figyelembe kell venni az n darab gyököt, ugyanúgy mint a trigonometrikus alakban!).

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Ezért, hogy a számításokban ne egy nehezen kezelhető számpárt, vagy egy hosszadalmasan felírható trigonometrikus alakot kelljen használni, bevezették a komplex szám exponenciális alakját:

$$z = r \cdot e^{i \cdot j}$$

mellyel az exponenciális függvények szabályai szerint lehet számolni (figyelve a gyökvonás esetére). Az exponensben lévő i szorzó jelzi, hogy itt nem valós exponenciális függvényről, hanem komplex számról van szó.

A komplex eredmény értelmezése

Tegyük fel, hogy a bevezetőben leírt másodfokú egyenlet mondjuk egy autó lengéscsil-lapítójának beállításakor a kaszni föl-le mozgására felírt másodrendű differenciál-egyenlet megoldása során fordul elő (ez már nem az anyag része, csak egy szemléltető példa). A matematikai alapok hiányában legyen elég annyi, hogy a kaszni összetett mozgást végez, melynek egyik összetevője $x(t) = e^{x_1 \cdot t} + e^{x_2 \cdot t}$ alakú, ahol $x_{1,2}$ a másodfokú egyenlet gyökei. A kapott komplex gyököket behelyettesítve:

$$x(t) = e^{(-0.5+2 \cdot i) \cdot t} + e^{(-0.5-2 \cdot i) \cdot t} = e^{-0.5t} e^{i \cdot 2 \cdot t} + e^{-0.5t} e^{-i \cdot 2 \cdot t} =$$

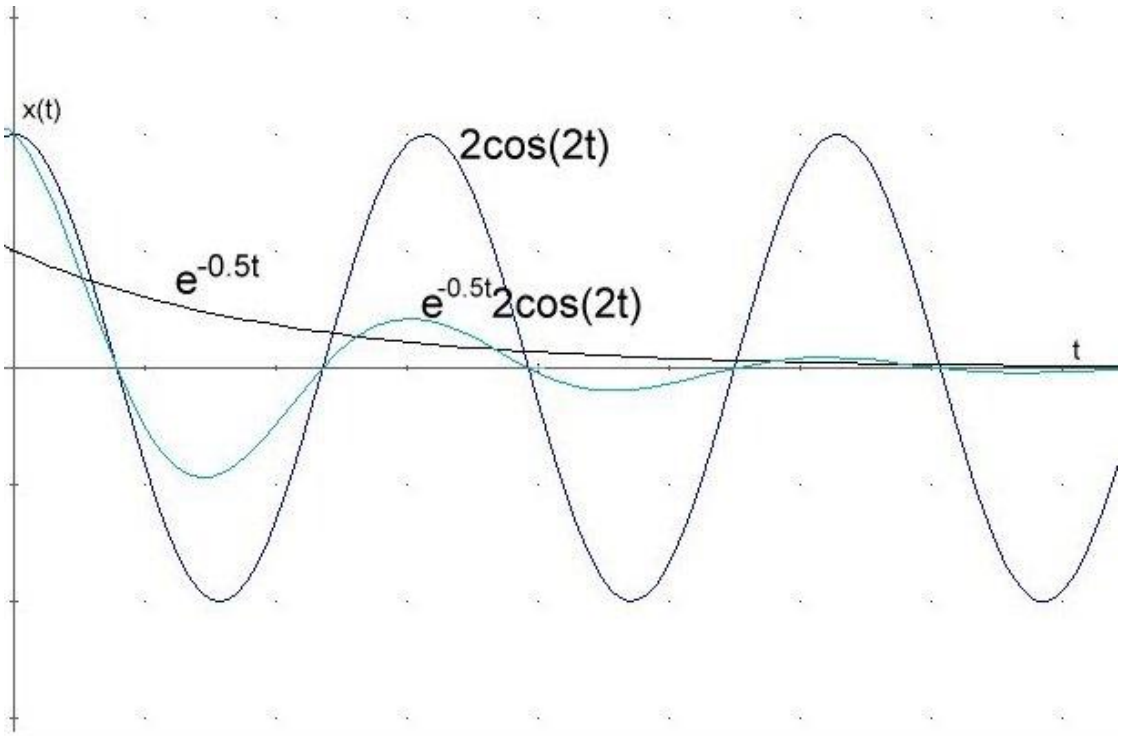
$$= e^{-0.5t} (\cos(2t) + i \cdot \sin(2t)) + e^{-2t} (\cos(-2t) + i \cdot \sin(-2t)) =$$

$$= e^{-0.5t} (\cos(2t) + i \cdot \sin(2t) + \cos(-2t) + i \cdot \sin(-2t))$$

Mivel $\sin(x) = -\sin(-x)$ és $\cos(x) = \cos(-x)$; ezért:

$$x(t) = e^{-0.5t} (\cos(2t) + i \cdot \sin(2t) + \cos(2t) - i \cdot \sin(2t)) = 2 \cdot e^{-0.5t} \cos(2t)$$

A kaszni mozgása egy exponenciálisan csillapodó amplitúdójú koszinuszos rezgés (ami nem túl jó egy kocsiban, hacsak nem akar valaki tengeribeteg lenni, még van mit állítani), itt a képzetes tag a rezgés frekvenciájával, a valós tag a rezgés csillapodásának mértékével arányos:



PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

A szorzás poláros alakjának és algebrai alakjának azonossága:

Algebrai alakban:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$$

Trigonometrikus alakban:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(j_1 + j_2) + i \cdot \sin(j_1 + j_2))$$

Bizonyítandó, hogy algebrai alakban a szorzás műveleti szabályát alkalmazva ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha polárosban végeztük volna el a műveletet a poláros alak szorzásszabályával. Ez igaz, ha az algebrai alakból számítható abszolút érték és szög megegyezik a poláros alakéval.

Abszolút értékek:

Algebrai alak szabályait használva:

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2\right) + \left(a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2\right)} =$$

$$= \left[\sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2}\right]$$

Poláros alak szabályait használva:

$$|z_1 z_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_2^2\right)} =$$

$$= \left[\sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2}\right]$$

Szögek:

Két szöget egyenlőnek tekintünk, ha tangensük és szinuszuk egyenlő (Ha a szög nagyobb 360°-nál ($j > k \cdot 360°, k = 1,2,3...$) akkor $j = j - k \cdot 360°$).

Algebrai alak szabályait használva:

$$\operatorname{tg} j_{z_1 z_2} = \left[\frac{a_1 b_2 + a_2 b}{a_1 a_2 - b_1 b_2}\right]$$

$$\sin j_{z_1 \cdot z_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{\sqrt{(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)^2 + (a_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot b_1)^2}} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{\sqrt{\left(a_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2\right) + \left(a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_2^2 b_1^2\right)}} =$$

$$= \left[\frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{\sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 a_2^2 + b_2^2 b_1^2}}\right]$$

Poláros alak szabályait használva (felhasználva az addíciós tételeket):

$$\operatorname{tg}(j_1 + j_2) = \frac{\operatorname{tg} j_1 + \operatorname{tg} j_2}{1 - \operatorname{tg} j_1 \cdot \operatorname{tg} j_2} = \frac{\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}}{1 - \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2}} = \frac{\frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 \cdot a_2}}{\frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_1 a_2}} = \left[\frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}\right]$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\sin(j_1 + j_2) = \sin j_1 \cdot \cos j_2 + \sin j_2 \cdot \cos j_1 =$$
$$= \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \cdot \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} + \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} =$$
$$= \frac{b_1 \cdot a_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)\cdot(a_2^2 + b_2^2)}} + \frac{b_2 \cdot a_1}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)\cdot(a_2^2 + b_2^2)}} = \left[\frac{b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1}{\sqrt{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2}}\right]$$

Az osztásra ugyanígy végezhető el az azonosságvizsgálat.

Fontosabb komplex számok:

$z_1 = 1 = 1 + 0 \cdot i$ $\quad z_4 = -i = 0 + (-1) \cdot i$ $\quad z_7 = -1 + i = (-1) + 1 \cdot i$

$z_2 = -1 = -1 + 0 \cdot i$ $\quad z_5 = 1 + i = 1 + 1 \cdot i$ $\quad z_8 = -1 - i = -1 + (-1) \cdot i$

$z_3 = i = 0 + 1 \cdot i$ $\quad z_6 = 1 - i = 1 + (-1) \cdot i$

A poláros alak az ábrázolás alapján:

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$

$j_1 = 0° = 360°; j_2 = 180°; j_3 = 90°; j_4 = 270° = -90°$,

illetve radiánban:

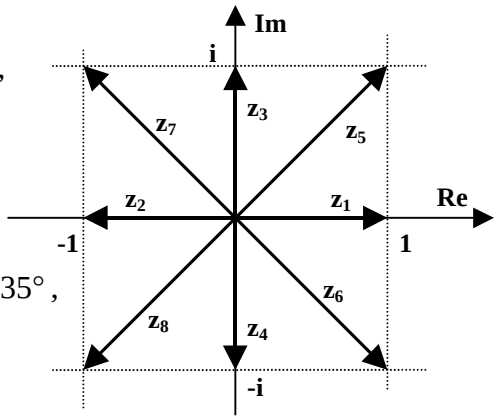
$j_1 = 0 = 2p; j_2 = p; j_3 = \frac{p}{2}; j_4 = \frac{3p}{2} = -\frac{p}{2}$

$r_5 = r_6 = r_7 = r_8 = \sqrt{2}$

$j_5 = 45°; j_6 = 315° = -45°; j_7 = 135°; j_8 = 225° = -135°$,

illetve radiánban:

$j_5 = \frac{p}{4}; j_6 = \frac{7p}{4} = -\frac{p}{4}; j_7 = \frac{3p}{4}; j_8 = \frac{5p}{4} = -\frac{3p}{4}$



Igaz ez akkor is, ha a komplex szám komponensei nem egységnyiek. Ezért célszerű megjegyezni:

- Ha az egyik komponens 0, akkor $r = |a\ nemzérus\ komponens|$; $j = 90°$ illetve $\frac{p}{2}$ többszöröse (hogy hányszorosa az az előjeltől függ). **Különösen z_3-t és z_4-t ajánlatos megjegyezni, hiszen itt számításkor az arctg függvénybe nem tudunk behelyettesíteni (**$\operatorname{tg} j_3 = \infty; \operatorname{tg} j_4 = -\infty$**).**
- Ha a két komponens megegyezik, akkor $r = |az\ egyik\ komponens| \cdot \sqrt{2}$; $j = 45°$ illetve $\frac{p}{4}$ többszöröse (hogy hányszorosa az az előjeltől függ).

Ha a fenti formájú komplex számot adnak meg, a számításnál rövidebb lehet egy gyors vázlatos de előjelheyes rajz, amivel eldől, hogy a szög 90° illetve 45° hányszorosa.

Példák:

1. $\sqrt[3]{-1+i} = ?$ azaz: $z = -1 + i \rightarrow \sqrt[3]{z} = ?$

A gyökvonásra poláros alakban ismerünk műveleti szabályt, ezért átváltjuk poláros alakba:

$z = -1 + 1 \cdot i \Rightarrow a = -1; b = 1$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$j = ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{b}{a}\bigg|_{a>0} \qquad \text{mivel a} < 0 \;\; j = p + ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{b}{a}$$

$$j = p + ar\,\mathrm{ctg}\,\frac{b}{a}\bigg|_{a<0}$$

Most radiánban számolunk, a számológépet is **át kell váltani** radiánra! (**DEG®RAD**)

$ar\,\mathrm{ctg}(-1) = -0.78539$ így:

$j = p - 0.78539 = 2.356$

vagy ha észrevesszük, hogy z az előbb tárgyalt fontosabb komplex számok közül $\mathbf{z_7}$:

$$j = \frac{3p}{4} = (135°)$$

$$z = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3p}{4} + i\sin\frac{3p}{4}\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{j}{n} + \frac{k\cdot 2p}{n}\right)_{k=0,1,2,\ldots n-1} + i\cdot\sin\left(\frac{j}{n} + \frac{k\cdot 2p}{n}\right)_{k=0,1,2,\ldots n-1}\right)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{j}{3} + \frac{k\cdot 2p}{3}\right)_{k=0,1,2} + i\cdot\sin\left(\frac{j}{3} + \frac{k\cdot 2p}{3}\right)_{k=0,1,2}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{3p}{4}}{3} + \frac{k\cdot 2p}{3}\right)_{k=0,1,2} + i\cdot\sin\left(\frac{\frac{3p}{4}}{3} + \frac{k\cdot 2p}{3}\right)_{k=0,1,2}\right) = .$$

$$= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{p}{4} + \frac{k\cdot 2p}{3}\right)_{k=0,1,2} + i\cdot\sin\left(\frac{p}{4} + \frac{k\cdot 2p}{3}\right)_{k=0,1,2}\right)$$

Hogy a gyökvonás szabályát jobban megértsük nézzük meg az eredményt (*most fokban számolva, hogy szemléletesebb legyen*):

$$z = \sqrt{2}\cdot(\cos 135° + i\sin 135°)$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{135°}{3} + \frac{k\cdot 360°}{3}\right)_{k=0,1,2} + i\cdot\sin\left(\frac{135°}{3} + \frac{k\cdot 360°}{3}\right)_{k=0,1,2}\right) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(45° + \frac{k\cdot 360°}{3}\right)_{k=0,1,2} + i\cdot\sin\left(45° + \frac{k\cdot 360°}{3}\right)_{k=0,1,2}\right)$$

Behelyettesítve:

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos 45° + i\sin 45°); k = 0$$

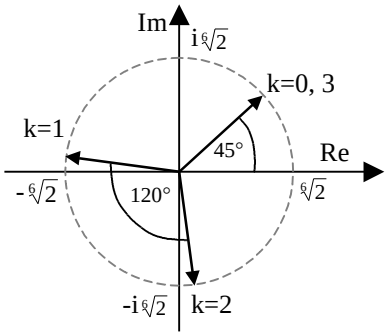
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(45° + \frac{360°}{3}\right) + i\sin\left(45° + \frac{360°}{3}\right)\right); k = 1$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\cdot(\cos(45° + 120°) + i\sin(45° + 120°)); k = 1$$

$$= \sqrt[6]{2}\cdot(\cos(165°) + i\sin(165°)); k = 1$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(45° + \frac{720°}{3}\right) + i\sin\left(45° + \frac{720°}{3}\right)\right); k = 2$$
$$z_3 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos(45° + 240°) + i\sin(45° + 240°)\right); k = 2$$
$$= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos(285°) + i\sin(285°)\right); k = 2$$



$$z_4 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(45° + \frac{1080°}{3}\right) + i\sin\left(45° + \frac{1080°}{3}\right)\right); k = 3$$
$$z_4 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos(45° + 360°) + i\sin(45° + 360°)\right); k = 3$$
$$= \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos(45°) + i\sin(45°)\right); k = 3$$

Tehát $z_4 = z_1$, a k = 3 behelyettesítése már nem adott új eredményt.

Visszahatványozva:

$$z_1^{\,3} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(3\cdot 45°) + i\sin(3\cdot 45°)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right)$$

$$z_2^{\,3} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(3\cdot 165°) + i\sin(3\cdot 165°)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(495°) + i\sin(495°)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\left(\cos(135° + 360°) + i\sin(135° + 360°)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right)$$

$$z_3^{\,3} = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(3\cdot 285°) + i\sin(3\cdot 285°)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(855°) + i\sin(855°)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot\left(\cos(135° + 2\cdot 360°) + i\sin(135° + 2\cdot 360°)\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos(135°) + i\sin(135°)\right)$$

2. $z_1 = 5(\cos 3 + i\sin 3)$ $\qquad z_2 = 2 + 3i$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{z_1}}{\sqrt[3]{z_2^{\,5}}} = z = ?$

Mivel a gyökvonásra és a hatványozásra csak poláros (trigonometrikus) alakban ismerünk műveleti szabályt z_2-t poláros alakba kell alakítani. Mivel z_1-ben a szög értéke mellé nem írtak ° jelet, a szöget radiánban adták meg, így célszerű nekünk is radiánban kiszámolni z_2 szögét, a számológépet **át kell váltani** radiánra! (**DEG®RAD**)

$$r_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$j = ar\,\mathrm{ctg}\left.\frac{b}{a}\right|_{a>0}$$

mivel $a_2 > 0$ $\quad j_2 = ar\,\mathrm{ctg}\dfrac{b_2}{a_2} = ar\,\mathrm{ctg}\dfrac{3}{2} = 0.9828$

$$j = p + ar\,\mathrm{ctg}\left.\frac{b}{a}\right|_{a<0}$$

$$z_2 = \sqrt{13}(\cos 0.9828 + i\sin 0.9828)$$

Először mindig a legbelső művelete(ke)t végezzük el:

$$z^n = r^n\cdot\left(\cos(n\cdot j) + i\cdot\sin(n\cdot j)\right)$$
$$z_2^{\,5} = \left(\sqrt{13}\right)^5\left(\cos(0.9828\cdot 5) + i\sin(0.9828\cdot 5)\right) = \sqrt{13^5}\left(\cos(4.914) + i\sin(4.914)\right)$$

Aztán a gyökvonások:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{j}{n} + \frac{k\cdot 2p}{n}\right)_{k=0,1,2,\ldots n-1} + i\cdot\sin\left(\frac{j}{n} + \frac{k\cdot 2p}{n}\right)_{k=0,1,2,\ldots n-1}\right)$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\sqrt[3]{z_2^{\,5}} = \sqrt[3]{\sqrt{13^5}}\left(\cos\left(\frac{4.914+2kp}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4.914+2kp}{3}\right)\right); k=0,1,2$$

$$\sqrt[3]{z_2^{\,5}} = \sqrt[6]{13^5}\left(\cos\left(1.638+\frac{2kp}{3}\right)+i\sin\left(1.638+\frac{2kp}{3}\right)\right); k=0,1,2$$

Hogy a két gyökvonás gyökeit megkülönböztethessük, k helyett n-el jelölöm $\sqrt[5]{z_1}$ különböző gyökeit:

$$\sqrt[5]{z_1} = \sqrt[5]{5}\left(\cos\left(\frac{3+2np}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3+2np}{5}\right)\right); n=0,1...4$$

$$\sqrt[5]{z_1} = \sqrt[5]{5}\left(\cos\left(0.6+\frac{2np}{5}\right)+i\sin\left(0.6+\frac{2np}{5}\right)\right); n=0,1...4$$

Aztán az osztás:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\left(\cos(j_1-j_2)+i\cdot\sin(j_1-j_2)\right)$$

$$\frac{\sqrt[5]{z_1}}{\sqrt[3]{z_2^{\,5}}} = \frac{\sqrt[5]{5}\left(\cos\left(0.6+\frac{2np}{5}\right)+i\sin\left(0.6+\frac{2np}{5}\right)\right); n=0,1...4}{\sqrt[6]{13^5}\left(\cos\left(1.638+\frac{2kp}{3}\right)+i\sin\left(1.638+\frac{2kp}{3}\right)\right); k=0,1,2}$$

$$\frac{\sqrt[5]{z_1}}{\sqrt[3]{z_2^{\,5}}} = \frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[6]{13^5}}\left(\cos\left(0.6-1.638+\frac{2np}{5}-\frac{2kp}{3}\right)+i\sin\left(0.6-1.638+\frac{2np}{5}-\frac{2kp}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[6]{13^5}}\left(\cos\left(-1.038+2p\left(\frac{n}{5}-\frac{k}{3}\right)\right)+i\sin\left(-1.038+2p\left(\frac{n}{5}-\frac{k}{3}\right)\right)\right); \begin{matrix} k=0,1,2 \\ n=0,1,...4 \end{matrix}$$

A fenti felírásmód azt jelenti, hogy minden olyan komplex szám megoldás, mely n és k lehetséges párosaiból (kombinációiból pl. (n=0, k=0); (n=0, k=1), (n=0, k=2), (n=1, k=0) … stb.) előállítható. Ez valójában 12 darab különböző megoldást jelent, de a fenti felírásmóddal egy egyenletben röviden kifejezhető.

3. $z_1 = -2i \qquad z_2 = 5\cdot e^{i\frac{p}{6}} \qquad \frac{z_2^{\,3}}{\sqrt{z_1}} = ?$

Alkítsuk át polárosba z_1-t és z_2-t:

$$z_2 = 5\left(\cos\frac{p}{6}+i\sin\frac{p}{6}\right)$$

A szög ismét radiánban van.

z_1 a fontos komplex számok közül $\mathbf{z_4}$ 2-szerese:

$$r_1 = 2 \qquad j_1 = \frac{3p}{2} = -\frac{p}{2}\,(=-90°) \;\text{Þ}\; z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{p}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{p}{2}\right)\right)$$

$$z_2^{\,3} = 5^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{p}{6}\right)+i\sin\left(3\cdot\frac{p}{6}\right)\right)=125\left(\cos\frac{p}{2}+i\sin\frac{p}{2}\right)$$

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{p}{4}+\frac{k2p}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{p}{4}+\frac{k2p}{2}\right)\right); k=0,1$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\frac{z_2^{\,3}}{\sqrt{z_1}} = \frac{125\left(\cos\frac{p}{2} + i\sin\frac{p}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{p}{4} + \frac{k2p}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{p}{4} + \frac{k2p}{2}\right)\right)}; k = 0,1 =$$

$$= \frac{125}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{4}\right) - \frac{k2p}{2}\right) + i\sin\left(\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{4}\right) - \frac{k2p}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{125}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{p}{4} - \frac{k2p}{2}\right) + i\sin\left(\frac{p}{4} - \frac{k2p}{2}\right)\right); k = 0,1$$

4. $z = 16 \qquad \sqrt[4]{z} = ?$

Ez egy beugratós feladat (a tanárok épp ezért szeretik feladni). Középiskolában megtanultuk, hogy $16 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$ ezért $\sqrt[4]{16}$ 2 és –2, mindegyik kétszeres gyök, mivel az $x^4 - 16 = 0$ negyedfokú egyenletnek négy megoldása kell legyen. Tehát a megoldások: -2, -2, 2, 2. Csakhogy ez csak a valós számok halmazára igaz. Komplexben:

$z = 16 + 0i$ ez alapján $r = 16$ és $j = 0 = 0°$

$z = 16(\cos 0 + i\sin 0)$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(0 + \frac{k2p}{4}\right) + i\sin\left(0 + \frac{k2p}{4}\right)\right); k = 0,1,2,3$$

illetve fokban a jobb átláthatóság érdekében:

$$z_0 = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(0 + \frac{k360°}{4}\right) + i\sin\left(0 + \frac{k360°}{4}\right)\right); k = 0,1,2,3$$

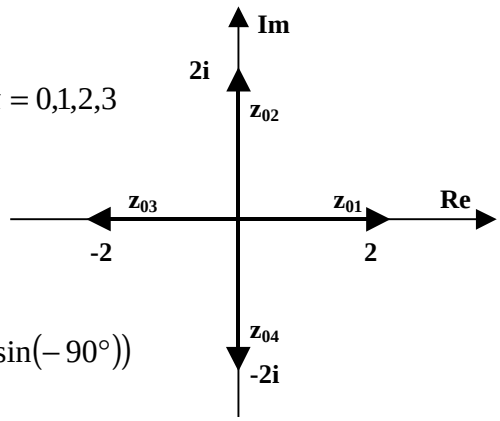
Kifejtve és ábrázolva:

k=0 $z_{01} = 2(\cos(0°) + i\sin(0°))$

k=1 $z_{02} = 2(\cos(90°) + i\sin(90°))$

k=2 $z_{03} = 2(\cos(180°) + i\sin(180°))$

k=3 $z_{04} = 2(\cos(270°) + i\sin(270°)) = 2(\cos(-90°) + i\sin(-90°))$



Mind a négy megoldás abszolút értéke valóban 2 és szerepel köztük a 2 és a -2. A maradék két megoldás viszont 2i és –2i, tehát nincsenek kétszeres gyökök. Ezt úgy általánosíthatjuk, hogy a komplex számok halmazán egy n-ed fokú egyenletnek n különböző gyöke lesz.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com