Szabályok:

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

2. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$

Összetett fügvények:

3.a,b $$\int g^a(x) \cdot g^{|}(x)dx = \begin{cases} \int g^a(x) \cdot g^{|}(x)dx = \dfrac{g^{a+1}(x)}{a+1} + C & ;\text{ha } a \neq -1 \\ \int \dfrac{g^{|}(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + C & ;\text{ha } a = -1 \end{cases}$$

4. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Függvények szozata

5. $\int u(x)v^{|}(x)dx = u(x)v(x) - \int u^{|}(x)v(x)dx$

Példamegoldások

1.: $\int \frac{\frac{3}{9}}{5-8x}dx = ?$

A 3. Szabályokhoz próbáljuk meg átalakítani:

$$\int \frac{\frac{3}{9}}{5-8x}dx = ? = \int \frac{3}{9}(5-8x)^{-1}dx$$

Mivel α = -1 a 3.b szabályt kell használnunk, $\int \frac{g^{|}(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + C$, maradunk az eredeti $\int \frac{\frac{3}{9}}{5-8x}dx = ?$ felírásmódnál.

Próbáljuk ki, hogy a számláló deriváltja-e a nevezőnek:

$g'(x) = (5-8x)' = -8$

$-8 \neq \frac{3}{9}$ de kostanssal való szorzás(ok)val a számlálóba tudjuk hozni a nevező deriváltát:

$$\int \frac{\frac{3}{9}}{5-8x}dx = \int \frac{1}{-8} \cdot (-8)\frac{\frac{3}{9}}{5-8x}dx = \int \frac{1}{-8} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{-8}{5-8x}dx = \frac{1}{-8} \cdot \frac{3}{9} \cdot \int \frac{\overset{g'(x)}{-8}}{\underset{g(x)}{5-8x}}dx$$

Alkalmazva a 3.b szabályt:

$$\frac{1}{-8} \cdot \frac{3}{9} \cdot \int \frac{\overset{g'(x)}{-8}}{\underset{g(x)}{5-8x}}dx = \frac{1}{-8} \cdot \frac{3}{9} \cdot (\ln|g(x)| + c) = \frac{1}{-8} \cdot \frac{3}{9} \cdot \ln|5-8x| + C$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

2.: $\int \sin^3(x)dx = ?$

Mivel egy összetett függvény integrálját kell megoldani (*köbre emelés, benne sin(x)*), a 3. vagy a 4. szabályokat kell használni. A 3.a szabályban van hatványozott függvény, de azt meg kell szorozni ugyanannak a függvénynek a deriváljával. Alakítsuk át:

$$\int \sin^3(x)dx = \int \sin^2(x)\sin(x)dx$$

Használjuk fel a $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ összefüggést:

$$\int \sin^2(x)\sin(x)dx = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\sin(x)dx = \int \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)dx$$

Az 1. szabály alapján

$$\int \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)dx = \int \sin(x)dx - \int \sin(x)\cos^2(x)dx$$

Az első tag egyszerű alapintegrál, a második tagra a 3.a szabály alakalmazhatjuk:

$$\int \sin(x)dx - \int \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\underbrace{\cos^2(x)}_{g^2(x)}dx = -\cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

3.: $\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx = ?$

Mivel összetett függvények integrálját kell megoldani (*köbre emelés, benne sin(x), négyzetre emelés, benne cos(x)*), ráadásul függvények szorzata is, de trigonometrikus függvények esetén érdemes megpróbálni átalakítani, hogy a 3. vagy a 4. szabályokat használni lehessen. A 3.a szabályban van hatványozott függvény, de azt meg kell szorozni ugyanannak a függvénynek a deriváljával. Alakítsuk át:

$$\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx = \int \sin^2(x)\sin(x)\cos^2(x)dx$$

Használjuk fel a $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ összefüggést:

$$\int \sin^2(x)\sin(x)\cos^2(x)dx = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\sin(x)\cos^2(x)dx =$$

$$= \int \sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)\cos^4(x)dx$$

Az 1. szabály alapján

$$\int \sin(x)\cos^2(x) - \sin(x)\cos^4(x)dx = \int \sin(x)\cos^2(x)dx - \int \sin(x)\cos^4(x)dx$$

Mindkét tagra a 3.a szabály alakalmazhatjuk:

$$\int \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\underbrace{\cos^2(x)}_{g^2(x)}dx - \int \underbrace{\sin(x)}_{g'(x)}\underbrace{\cos^4(x)}_{g^2(x)}dx = \frac{\cos^3(x)}{3} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

4.: $\int \sin^2(2x)\cos^2(2x)dx = ?$

Mint a 3. példában, alakítsuk át mondjuk $\sin^2(2x)$-t:

$$\int \sin^2(2x)\cos^2(2x)dx = \int \left(1-\cos^2(2x)\right)\cos^2(2x)dx = \int \left(\cos^2(2x)-\cos^4(2x)\right)dx =$$

$$\int \cos^2(2x)dx - \int \cos^4(2x)dx = \int \cos^2(2x)dx - \int \cos^2(2x)\cdot\cos^2(2x)dx$$

Használjuk fel a $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ addíciós tételt:

$$\int \cos^2(2x)dx - \int \cos^2(2x)\cdot\cos^2(2x)dx = \int \frac{1+\cos(4x)}{2}dx - \int \frac{1+\cos(4x)}{2}\cdot\frac{1+\cos(4x)}{2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int \cos(4x)dx - \left(\frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{4}\int 2\cos(4x)dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(4x)dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int \cos(4x)dx - \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{2}\int \cos(4x)dx - \frac{1}{4}\int \cos^2(4x)dx =$$

Egyszerűsíthetünk $\frac{1}{2}\int \cos(4x)dx - \frac{1}{2}\int \cos(4x)dx = 0$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \cos^2(4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \cos^2(4x)dx$$

Használjuk fel ismét a $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ addíciós tételt:

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \cos^2(4x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(8x)}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int 1dx - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos(8x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\sin(8x) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\sin(8x) + C$$

5.: $\int \frac{10x}{\sqrt{3x^2-7}}dx = ?$

A 3. Szabályokhoz próbáljuk meg átalakítani:

$$\int \frac{10x}{\sqrt{3x^2-7}}dx = ? = \int 10x\left(3x^2-7\right)^{\frac{-1}{2}}dx$$

Mivel $\alpha \neq -1$ a 3.a szabályt kell használnunk. Próbáljuk ki, hogy a hatványozott függvény meg van-e szorozva a deriváltjával:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$\left(3x^2-7\right)' = 6x$

6x ¹ 10x de konstanssal való szorzással előállítható a derivált:

$$\int 10x\left(3x^2-7\right)^{\frac{-1}{2}}dx = \int \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 10x\left(3x^2-7\right)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{6}\cdot 10\cdot \int 6x\left(3x^2-7\right)^{\frac{-1}{2}}dx$$

Alkalmazva 3.a szabályt:

$$\frac{10}{6}\cdot \int \underbrace{6x}_{g'(x)}\left(\underbrace{3x^2-7}_{g^{\frac{-1}{2}}(x)}\right)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{10}{6}\cdot \frac{\left(3x^2-7\right)^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{10}{3}\cdot\left(3x^2-7\right)^{\frac{1}{2}} + C$$

6.: $\int \mathrm{sh}(x)\cos(2x)dx = ?$

Most függvények szorzatáról van szó, az 5. szabályt használhatjuk:

$$\int \underbrace{\mathrm{sh}(x)}_{v'}\cdot \underbrace{\cos(2x)}_{u}dx = \underbrace{(\ )}_{v}\cdot\underbrace{(\ )}_{u} - \int \underbrace{(\ )}_{v}\cdot\underbrace{(\ )}_{u'}dx$$

$$\int\left(\underbrace{\mathrm{sh}(x)}_{v'}\right)\cdot\left(\underbrace{\cos(2x)}_{u}\right)dx = \left(\underbrace{\mathrm{ch}(x)}_{v}\right)\cdot\left(\underbrace{\cos(2x)}_{u}\right) - \int\left(\underbrace{\mathrm{ch}(x)}_{v}\right)\cdot\left(\underbrace{-2\sin(2x)}_{u'}\right)dx =$$

$$= \mathrm{ch}(x)\cdot\cos(2x) + 2\int \mathrm{ch}(x)\cdot\sin(2x)dx$$

Mellékszámításként vizsgáljuk meg a jobb oldalon álló integrált. Ez is függvények szorzata :

- $\int\left(\underbrace{\mathrm{ch}(x)}_{v'}\right)\cdot\left(\underbrace{\sin(2x)}_{u}\right)dx = \left(\underbrace{\mathrm{sh}(x)}_{v}\right)\cdot\left(\underbrace{\sin(2x)}_{u}\right) - \int\left(\underbrace{\mathrm{sh}(x)}_{v}\right)\cdot\left(\underbrace{2\cdot\cos(2x)}_{u'}\right)dx =$
- $= \mathrm{sh}(x)\cdot\sin(2x) - 2\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx$

A jobb oldalon álló integrál pontosan ugyanaz, mint amit ki kell számítanunk. Helyettesítsük be a mellékszámítás eredményét, majd rendezzük az egyenletet:

$$\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx = \mathrm{ch}(x)\cdot\cos(2x) + 2\left(\mathrm{sh}(x)\cdot\sin(2x) - 2\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx\right)$$

$$\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx = \mathrm{ch}(x)\cdot\cos(2x) + 2\,\mathrm{sh}(x)\cdot\sin(2x) - 4\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx$$

Adjunk hozzá minkét oldalhoz $4\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx$ -t.

$$5\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx = \mathrm{ch}(x)\cdot\cos(2x) + 2\,\mathrm{sh}(x)\cdot\sin(2x)$$

$$\int \mathrm{sh}(x)\cdot\cos(2x)dx = \frac{\mathrm{ch}(x)\cdot\cos(2x) + 2\,\mathrm{sh}(x)\cdot\sin(2x)}{5} + C$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Deriválós példa

$f'(x)=\left(\sin^5\left(3x^2+2\right)\right)'=?$

Összetett függvény:

$f(x)=\sin^5\left(3x^2+2\right)=\left(\sin\left(3x^2+2\right)\right)^5$

Erre a láncszabály vonatkozik:

$f'(x)=f'(g(v(x)))=f'(g)\cdot g'(v)\cdot v'(x)$ (*összetett függvény deriváltja egyenlő részfüggvények közvetlen változók szeriti deriváltjainak szorzatával*)

Bontsuk le *f(x)*-t részfüggvényeire (*határozzuk meg a közvetlen változókat*):

$f(\ )=(\ )^5$

a hatványfüggvény változóját nem tudjuk a láncszabály további alkalmazása nélkül deriválni *x* szerint, ezért elnevezzük pl. *k*-nak.

$f(k)=(k)^5$

Nézzük meg mi is az a *k*?: $k(\ )=\sin(\ )$

a szinuszfüggvény változóját nem tudjuk a láncszabály további alkalmazása nélkül deriválni *x* szerint, ezért elnevezzük pl. *l*-nek.

$k(l)=\sin(l)$

Nézzük meg mi is az az *l*?: $l(\ )=3(\ )^2+2$

a négyzetfüggvénynek most közvetlenül *x* a változója, le tudjuk deriválni *x* szerint a láncszabály alkalmazása nélkül is:

$l(x)=3(x)^2+2$

Most számoljuk ki a részfüggvények közvetlen változók szeriti deriváltjait:

$f(k)=(k)^5\Rightarrow f'(k)=5(k)^4$

$k(l)=\sin(l)\Rightarrow k'(l)=\cos(l)$

$l(x)=3(x)^2+2\Rightarrow l'(x)=6x$

Helyettesítsünk be a láncszabályba:

$f'(x)=5(k)^4\cdot\cos(l)\cdot 6x$

Helyettesítsük be *k(l)*-t:

$f'(x)=5(\sin(l))^4\cdot\cos(l)\cdot 6x$

Helyettesítsük be *l(x)*-t:

$f'(x)=5\left(\sin\left(3x^2+2\right)\right)^4\cdot\cos\left(3x^2+2\right)\cdot 6x$

Komplex számos példa

$\sqrt[7]{3(\cos 4+i\cdot\sin 4)}=?$

A koszinusz mögött álló szám (*a szög*) nem fokban van megadva, ezért radiánban kell számolnunk.

Be kell helyettesíteni a komplex szám trigonometrikus alakjának gyökvonás-képletébe.:

$$\sqrt[7]{3(\cos 4+i\cdot\sin 4)}=\sqrt[7]{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{4}{7}+\frac{k2p}{7}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4}{7}+\frac{k2p}{7}\right)\right);k=0,1,2,...6$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com