

A határozatlan integrál

Az integrálás művelete a deriválás fordítottja, amivel a „Melyik az az $F(x)$ függvény, amelyre $F'(x) = f(x)$ egyenlőség igaz?” kérdésre adjuk meg a választ.

Definíció: Az f függvénynek a H halmazon az F függvény primitív függvénye, ha - H része az f és F értelmezési tartománynak - az F differenciálra a H halmazon - $F'(x) = f(x)$ ($x \in H$).

Hatózzuk meg $f(x)=x^3$ primitív függvényét! $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ mivel $\left(\frac{1}{4}x^4\right)'=4\frac{x^3}{4}=x^3=f(x)$.

Megoldás lehet az $F(x)=\frac{1}{4}x^4+1, \frac{1}{4}x^2+2+\dots+n$.

Ezért a primitív függvényeket ebben az esetben $\frac{1}{4}x^4+C$ (ahol C valós szám) alakban írjuk fel.

Bizonyítás: $(F(x)+C)'=F'(x)+0=f(x)$

Definíció: Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük. Jelölése: $\int f(x)dx$.

Ha valamely i intervallumon F az f függvénynek primitív függvénye, akkor $\int f(x)dx=F(x)+C$

(A C konstans tagot integrációs állandónak - az f integrálandó függvény, vagy integranciens.

Integrálás: a primitív függvények meghatározása.

A dx jelölés azt jelzi, ha az x mellett más változók, vagy paraméterek is vannak, most az x változó szerinti primitív függvényről van szó.

Alapintegrálok: az elemi függvények deriválására vonatkozó tételek megfordítása

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = a \operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = a \operatorname{rcctg} x$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh}$$

$$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x$$

folytatás a következő oldalon

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \operatorname{cth} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsh} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arch} x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arth} x & ha|x|<1 \\ a \operatorname{cth} x & ha|x|>1 \end{cases}$$

folytatás az előző oldalról

$$\int X^a dx = \begin{cases} \int X^a dx = \frac{X^{a+1}}{a+1} & a \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| & a = -1 \end{cases} \quad \text{ha } a > 0, a \neq 1$$

Integrálási szabályok: Ha az $\int f(x)dx$ és $\int g(x)dx$ léteznek, akkor

$$\S \quad \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\S \quad \int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \quad \text{ minden } k \text{ valós számra}$$

Pl.:

$$\begin{aligned} \int (3 \cdot \sin x + 2 \cos x)dx &= \int 3 \sin x dx + \int 2 \cos x dx = \\ &= 3 \int \sin x dx + 2 \int \cos x dx = -3 \cos x + 2 \sin x + C \end{aligned}$$

Ha F az f primitív függvénye az i intervallumon és g differenciálható függvény, akkor

$$\int f(g(x)g'(x))dx = F(g(x)) + C \quad g(x) \in i$$

Esetei:

$$\int g^a(x) \cdot g'(x)dx = \begin{cases} a \neq -1, \int g^a(x) \cdot g'(x)dx = \frac{g^{a+1}(x)}{a+1} + C \\ a = -1, \quad \int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + C \end{cases}$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Példák:

1:

$$\begin{aligned} \int \sin^4(x) \cdot \cos^3(x)dx &= \int \sin^4(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \cos(x)dx = \int \sin^4(x) \cdot (1 - \sin^2 x) \cos(x)dx = \\ &= \int \sin^4 x \cos x dx - \int \sin^6 x \cos x dx \end{aligned}$$

mert $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Legyen $g(x) = \sin(x)$, ekkor $g'(x) = \cos x$, így pl :

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int g^4(x) \cdot g'(x)dx$$

$$\int \sin^4 x \cos x dx - \int \sin^6 x \cos x dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

2:

$$\int \frac{4}{1-5x} dx \quad \text{Legyen } g(x) = 1-5x, \text{ ekkor } g'(x) = -5, \text{ így:}$$

$$\int \frac{4}{1-5x} dx = \int 4 \cdot \frac{1}{-5} \cdot \frac{-5}{1-5x} dx = -\frac{4}{5} \int \frac{-5}{1-5x} dx = -\frac{4}{5} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = -\frac{4}{5} \ln|g(x)| =$$

$$= -\frac{4}{5} \ln|1-5x| + C$$

3:

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{1-5x^2}} dx \quad \text{Legyen } g(x) = 1-5x^2, \text{ ekkor } g'(x) = -10x, \text{ így:}$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{1-5x^2}} dx = \int 2x \cdot (1-5x^2)^{-\frac{1}{3}} dx = \int 2 \cdot \frac{1}{-10} \cdot (-10)x \cdot (1-5x^2)^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= -\frac{2}{10} \int (-10)x \cdot (1-5x^2)^{-\frac{1}{3}} dx = -\frac{2}{10} \int g'(x) \cdot (g(x))^{\frac{-1}{3}} = -\frac{2}{10} \frac{(g(x))^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} = -\frac{2}{10} \frac{(1-5x^2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} =$$

$$= -\frac{3}{10} \left(\sqrt[3]{1-5x^2} \right)^2 + C$$

4:

$$\int \sin\left(\frac{1}{4}x - 7\right) dx$$

$$\text{Mivel } \int f(x) dx = \int \sin(x) dx = F(x) + C = -\cos(x) + C \text{ és}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \Rightarrow \int f\left(\frac{1}{4}x - 7\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{4}x - 7\right) + C$$

Ebből:

$$\int \sin\left(\frac{1}{4}x - 7\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{4}} \left(-\cos\left(\frac{1}{4}x - 7\right) \right) + C = -4 \cos\left(\frac{1}{4}x - 7\right) + C$$

Parciális integrálás: Ha u és v differenciálható függvények, valamely i intervallumon és itt az $u^l v^r$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor az uv^l függvénynek is van primitív függvénye az i intervallumon.

Bizonyítás:

A szorzat integrálási szabálya szerint:

$$(u(x)v(x))^l = u^l(x)v(x) + u(x)v^l(x), \text{ ezután minden oldalt integrálva kapjuk:}$$

$$u(x)v(x) + C = \int (u^l(x)v(x) + u(x)v^l(x)) dx$$

Tagonként integrálva: $\int u^l(x)v(x) dx + \int u(x)v^l(x) dx = u(x)v(x) + C$ átrendezéssel kapjuk az alábbit:

$$\int u(x)v^l(x) dx = u(x)v(x) - \int u^l(x)v(x) dx \quad \text{tömörebben:} \quad \int u \cdot v^l dx = u \cdot v - \int u^l \cdot v dx$$

Példák:

$$1: \int x^2 \cos(3x+1) dx \quad (\text{egyszerű szorzatfüggvény})$$

$$u(x) = x^2 \quad v^l(x) = \cos(3x+1)$$

$$\text{akkor} \quad u^l(x) = 2x \quad v(x) = \frac{1}{3} \sin(3x+1)$$

$$\int x^2 \cos(3x+1) dx \stackrel{u \cdot v^l}{=} x^2 \frac{1}{3} \sin(3x+1) - \int 2x \frac{1}{3} \sin(3x+1) dx \stackrel{u \cdot v}{=}$$

$$\text{Így} \quad = \frac{1}{3} x^2 \sin(3x+1) - \frac{2}{3} \int x \sin(3x+1) dx$$

Az utolsó tagra méggyakrabban alkalmazva a parciális integrálás szabályát (*mellékszámítás*):

$$\S \quad u(x) = x \quad v^1(x) = \sin(3x + 1)$$

$$\S \quad u^1(x) = 1 \quad v(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x + 1)$$

$$\S \quad \int x \sin(3x + 1) dx = x \left(-\frac{1}{3} \cos(3x + 1) \right)_{u \cdot v} - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos(3x + 1) \right) dx =$$

$$\S \quad = -\frac{1}{3} x \cos(3x + 1) + \frac{1}{3} \int \cos(3x + 1) dx = -\frac{1}{3} x \cos(3x + 1) + \frac{1}{9} \sin(3x + 1)$$

be helyettesítve kapjuk:

$$\int x^2 \cos(3x + 1) dx = \frac{1}{3} x^2 \sin(3x + 1) + \frac{2}{9} x \cos(3x + 1) - \frac{2}{27} \sin(3x + 1) + C.$$

$$2: \int e^x \cdot \cos(3x + 1) \quad (\text{exponenciális függvényel vett szorzat})$$

$$u(x) = \cos(3x + 1) \quad v^1(x) = e^x$$

$$\text{akkor } u^1(x) = -3 \sin(3x + 1) \quad v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \text{Így } \int e^x \cdot \cos(3x + 1) dx &= e^x \cos(3x + 1) - \int e^x (-3 \sin(3x + 1)) dx = \\ &= e^x \cos(3x + 1) + 3 \int e^x \sin(3x + 1) dx \end{aligned}$$

Az utolsó tagra méggyakrabban alkalmazva a parciális integrálás szabályát (*mellékszámítás*):

$$\S \quad \int e^x \sin(3x + 1) dx \text{ most} \quad u(x) = \sin(3x + 1) \quad v^1(x) = e^x$$

$$\text{akkor } u^1(x) = 3 \cos(3x + 1) \quad v(x) = e^x$$

$$\S \quad \int e^x \sin(3x + 1) dx = e^x \sin(3x + 1) - \int e^x \cdot 3 \cos(3x + 1) dx =$$

$$\S \quad = e^x \sin(3x + 1) - 3 \int e^x \cos(3x + 1) dx$$

Az utolsó tag megegyezik a kiindulási integrálával. Behelyettesítve:

$$\text{Eredmeny} = \int e^x \cdot \cos(3x + 1) dx = e^x \cos(3x + 1) + 3(e^x \sin(3x + 1) - 9 \int e^x \cos(3x + 1) dx) =$$

$$= e^x \cos(3x + 1) + 3e^x \sin(3x + 1) - 9 \text{Eredmeny}$$

$$10 \text{Eredmeny} = e^x \cos(3x + 1) + 3e^x \sin(3x + 1)$$

$$\int e^x \cdot \cos(3x + 1) dx = \text{Eredmeny} = \frac{1}{10} (e^x \cos(3x + 1) + 3e^x \sin(3x + 1)) + C$$

$$3: \int \arccos(x) \quad (\text{közvetlenül nem integrálható függvény})$$

$$u(x) = \arccos(x) \quad v^1(x) = 1$$

$$\text{akkor } u^1(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad v(x) = x$$

$$\text{Így } \int 1 \cdot \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \int x \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x \cdot \arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Az utolsó tagra alkalmazva a $\int g^a(x) \cdot g^1(x) dx = \frac{g^{a+1}(x)}{a+1} + C$ szabályt (*mellékszámítás*):

$$\S \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx \quad \text{most } g(x) = 1-x^2 \quad g'(x) = -2x$$

$$\S \quad \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2)x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Behelyettesítve:

$$\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

Racionális törtfüggvény integrálja (polinomok hányadosának integrálja)

$$\int f(x) dx = \int \frac{sz_k \cdot x^k + sz_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + sz_1 \cdot x + sz_0}{h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \dots + h_1 \cdot x + h_0} dx$$

Kiszámíthatáshoz olyan alakra hozzuk $f(x)$ -t, amit könnyen tudunk integrálni. Ha a nevező fokszáma kisebb a számlálóénál ($g < k$), akkor először polinomosztást csinálunk, melynek eredményeképpen olyan összeget kapunk, melyben lesznek x hatványai konstansokkal szorozva, valamint lesz egy olyan racionális tört maradék, aminek számlálója kisebb fokszámú a nevezőnél.

$$\begin{aligned} \frac{sz_k \cdot x^k + sz_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + sz_1 \cdot x + sz_0}{h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \dots + h_1 \cdot x + h_0} &= \\ &= c_{k-g} \cdot x^{k-g} + c_{k-g-1} \cdot x^{k-g-1} + \dots + c_1 \cdot x + c_0 + \frac{s_{g-1} \cdot x^{g-1} + s_{g-2} \cdot x^{g-2} + \dots + s_1 \cdot x + s_0}{h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \dots + h_1 \cdot x + h_0} \end{aligned}$$

Az integrál művelet és az összeadás felcserélhető, így lesznek egyrészt x hatványainak integráljai, amelyek az $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ alapintegrállal számíthatók, valmint a maradéktag integrálja:

$$\begin{aligned} \int \frac{sz_k \cdot x^k + sz_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + sz_1 \cdot x + sz_0}{h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \dots + h_1 \cdot x + h_0} dx &= c_{k-g} \int x^{k-g} dx + c_{k-g-1} \int x^{k-g-1} dx + \dots \\ &+ c_1 \int x dx + c_0 \int 1 dx + \int \frac{s_{g-1} \cdot x^{g-1} + s_{g-2} \cdot x^{g-2} + \dots + s_1 \cdot x + s_0}{h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \dots + h_1 \cdot x + h_0} dx \end{aligned}$$

Újdonságként egy olyan racionális tört interdálját kell számítani, aminek számlálója kisebb fokszámú a nevezőnél.

Bontsuk a nevezőt gyöktényezős alakra:

$$\frac{s_{g-1} \cdot x^{g-1} + s_{g-2} \cdot x^{g-2} + \dots + s_1 \cdot x + s_0}{h_g \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_g)} = \frac{1}{h_g} \cdot \left(\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A_g}{(x-x_g)} \right)$$

Ezután a törtet bontsuk fel olyan tagok összegére, melyeknek nevezői az egyes gyöktényezők, számlálói pedig konstansok:

$$\frac{s_{g-1} \cdot x^{g-1} + s_{g-2} \cdot x^{g-2} + \dots + s_1 \cdot x + s_0}{h_g \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_g)} = \frac{1}{h_g} \cdot \left(\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A_g}{(x-x_g)} \right)$$

Ezt az alakot tagonként integrálhatjuk:

$$\int \frac{s_{g-1} \cdot x^{g-1} + s_{g-2} \cdot x^{g-2} + \dots + s_1 \cdot x + s_0}{h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \dots + h_1 \cdot x + h_0} dx = \\ = \frac{1}{h_g} \cdot \left(\int \frac{A_1}{(x - x_1)} dx + \int \frac{A_2}{(x - x_2)} dx + \dots + \int \frac{A_g}{(x - x_g)} dx \right)$$

Egy ilyen tag integrálja (pl. az első tag):

$$\int \frac{A_1}{x - x_1} dx = A_1 \int \frac{1}{x - x_1} dx \quad \text{Ha megválasztjuk } g(x) = x - x_1 \text{ akkor } g'(x) = 1 \text{ ebből:} \\ A_1 \int \frac{1}{x - x_1} dx = A_1 \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = A_1 \ln|g(x)| = A_1 \ln|x - x_1| + C$$

Lássuk ezt egy példán:

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 20x - 4}{x^2 - 5x + 6} dx \quad \text{Az értelmezési tartomány (most kell ez is):} \\ D_f : x \in R, x \neq 2, x \neq 3 \quad (\text{mert a nevező itt } 0)$$

Polinomosztás:

$$\begin{array}{r} (x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 20x - 4) : (x^2 - 5x + 6) = x^2 + 2x - 1 + \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} \\ - \quad x^4 - 5x^3 + 6x^2 \\ \hline 2x^3 - 11x^2 + 20x - 4 \\ - \quad 2x^3 - 10x^2 + 12x \\ \hline -x^2 + 8x - 4 \\ - \quad -x^2 + 5x - 6 \\ \hline 3x + 2 \end{array}$$

Polinomosztás után:

$$\int \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 20x - 4}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left(x^2 + 2x - 1 + \frac{3x + 24}{x^2 - 5x + 6} \right) dx = \\ = \int x^2 dx + 2 \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{3x + 24}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Az utolsó tagot tovább alakítva (mellékszámítás):

$$\S \quad \int \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} dx \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$\S \quad \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3x + 2}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$

§ A mivel $D_f : x \in R, x \neq 2, x \neq 3$, a nevezővel egyszerűsíthetünk:

$$\S \quad \frac{3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{Ax-3A+Bx-2B}{(x-2)(x-3)}$$

§ Ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn minden x -re, ha külön-külön az x -t tartalmazó és a csak konstansokat tartalmazó tagok megegyeznek.

$$\S \quad I.: 3x = Ax + Bx \Rightarrow 3 = A + B \Rightarrow B = 3 - A$$

$$\S \quad II.: 2 = -3A - 2B$$

$$\S \quad 2 = -3A - 2(3 - A) = -A - 6 \Rightarrow A = -8 \Rightarrow B = 11$$

$$\S \quad \frac{3x+2}{x^2-5x+6} = \frac{-8}{x-2} + \frac{11}{x-3}$$

$$\begin{aligned} \S \quad \int \frac{3x+2}{x^2-5x+6} dx &= \int \frac{-8}{x-2} dx + \int \frac{11}{x-3} dx = 11 \int \frac{1}{x-3} dx - 8 \int \frac{1}{x-2} dx = \\ &= 11 \ln|x-3| - 8 \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 20x - 4}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int x^2 dx + 2 \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{3x + 24}{x^2 - 5x + 6} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - x + 11 \ln|x-3| - 8 \ln|x-2| + C \end{aligned}$$

2:

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} dx \quad \text{Az értelmezési tartomány } D_f : x \in R, x \neq 2, x \neq 3, x \neq -1$$

Átalakítás:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} = \\ &= \frac{A(x-3)(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+1)} \quad \text{A nevezővel ismét egyszerűsíthetünk,} \end{aligned}$$

mert $D_f : x \in R, x \neq 2, x \neq 3, x \neq -1$. A beszorzásokat is elvégezve.

$$x-1 = Ax^2 - 2Ax - 3A + Bx^2 - Bx - 2B + Cx^2 - 5Cx + 6C$$

Ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn minden x -re, ha külön-külön az x ugyanazt a hatványt tartalmazó tagok megegyeznek.

$$I.: 0x^2 = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 \Rightarrow A + B + C = 0 \Rightarrow C = -A - B$$

$$II.: x = -2Ax - Bx - 5Cx \Rightarrow -2A - B - 5C = 1$$

$$III.: -1 = -3A - 2B + 6C$$

$$III.: -1 = -3A - 2B + 6(-A - B) = -9A - 8B \Rightarrow B = \frac{9A + 1}{8}$$

$$II.: 1 = -2A - B - 5(-A - B) = -7A - 6B = -7A - 6 \frac{9A + 1}{8} = -13.75A + \frac{6}{8}$$

$$A = \frac{1 + \frac{8}{6}}{13.75} \approx 0.169 \quad B = \frac{9 \cdot 0.169 - 1}{8} = 0.065125 \quad C = -0.169 - 0.065125 = -0.234125$$

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)(x+1)} dx = \int \frac{0.169}{x-2} dx + \int \frac{0.065125}{x-3} dx - \int \frac{0.234125}{x+1} dx =$$

$$= 0.169 \int \frac{1}{x-2} dx + 0.065125 \int \frac{1}{x-3} dx - 0.234125 \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= 0.169 \ln|x-2| + 0.065125 \ln|x-3| - 0.234125 \ln|x+1| + C$$

3:

$$\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^2} dx \quad \text{Az értelmezési tartomány } D_f : x \in R, x \neq 2, x \neq -1$$

Ezt is át kell alakítanunk, de most (*mivel a nevezőben hatványozás van és ezért ott tulajdonképpen három tag szorzata van*) a gyöktényezős törtek máshogyan nének ki:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-2)(x+1)^2} &= \frac{x}{(x-2)(x+1)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B_1(x-2)(x+1) + B_2(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}\end{aligned}$$

A nevezővel most is egyszerűsíthetünk, mert $D_f : x \in R, x \neq 2, x \neq -1$

$$x = Ax^2 + 2Ax + A + B_1x^2 - B_1x - 2B_1 + B_2x - 2B_2$$

Ez az egyenlőség csak úgy állhat fenn minden x -re, ha külön-külön az x ugyanazt a hatványát tartalmazó tagok megegyeznek.

$$I.: 0x^2 = Ax^2 + B_1x^2 \Rightarrow A + B_1 = 0 \Rightarrow A = -B_1$$

$$II.: x = 2Ax - B_1x + B_2x \Rightarrow 2A - B_1 + B_2 = 1 \Rightarrow -2B_1 - B_1 + B_2 = 1 \Rightarrow -3B_1 + B_2 = 1$$

$$III.: 0 = A - 2B_1 - 2B_2 \Rightarrow 0 = -B_1 - 2B_1 - 2B_2 \Rightarrow -3B_1 = 2B_2 \Rightarrow B_2 = -\frac{3}{2}B_1$$

$$II.: -3B_1 - \frac{3}{2}B_1 = 1 \Rightarrow -\frac{9}{2}B_1 = 1 \Rightarrow B_1 = -\frac{2}{9} \Rightarrow B_2 = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{9}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{\frac{2}{9}}{x-2} + \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} - \frac{\frac{1}{3}}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x-2)(x+1)^2} dx &= \frac{2}{9} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{2}{9} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln|x+1| - \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot 1 dx = \\ &= \frac{2}{9} \ln|x-2| - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \cdot \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{2}{9} \ln|x-2| - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \\ &= \frac{2}{9} \ln|x-2| - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + C\end{aligned}$$

Általában, ha a **nevezőben többszörös gyök** van (van hatványozott gyöktényező)akkor az átalakítást a következő módon kell megtenni,(egy ötszörös gyök esetén bemutatva):

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)(x+3)(x-4)^5} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C_1}{x-4} + \frac{C_2}{(x-4)^2} + \frac{C_3}{(x-4)^3} + \frac{C_4}{(x-4)^4} + \frac{C_5}{(x-4)^5}$$

$x \neq 2, x \neq -3, x \neq 4$

A továbbiakban a számítási módszer megegyezik az előző példákban bemutatottal.

Integrálási helyettesítéssel:

Az $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$ $g(x) \in i$ alapján a jobb oldali függvény az alábbi alakzatban is felírható:

$$F(g(x)) = \left(\int f(u)du \right)_{u=g(x)}, \text{ majd ennek kiszámítása után az } u \text{ helyett } g(x)-t \text{ írunk.}$$

Ezekből adódik: $\int f(g(x))g'(x)dx = \left(\int f(u)du \right)_{u=g(x)}$

$$\text{Példa: } \int e^{x^3} 3x^2 dx = \left[\begin{array}{l} x^3 = u \\ 3x^2 dx = du \end{array} \right] = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3} + C \quad f(x) = e^x \quad g(x) = x^3$$

A fenti megoldást csak speciális esetekben tudjuk használni.

Általánosabban használható módszer:

$$\int f(x)dx = \left(\int f(g(u))g'(u)du \right)_{u=g^{-1}(x)}$$

ahol g : differenciálható, létezik inverz függvénye g^{-1} , a g^{-1} függvény értelmezési tartományának része.

Néhány helyettesítés:

$$\sqrt{a+x^2}; a > 0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= \sqrt{a} \operatorname{sh}(u) \\ dx &= \sqrt{a} \operatorname{ch}(u)du \end{aligned} ; \quad \sqrt{x^2-a}; a > 0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= \sqrt{a} \operatorname{ch}(u) \\ dx &= \sqrt{a} \operatorname{sh}(u)du \end{aligned}$$

$$\sqrt{a-x^2}; a > 0 \Rightarrow \begin{aligned} x &= \sqrt{a} \sin(u) \\ dx &= \sqrt{a} \cos(u)du \end{aligned}$$

Pl.

$$\begin{aligned} 1: \int \frac{x^2}{\sqrt{4+2x^2}}dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{2(2+x^2)}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}dx & x = \sqrt{2} \operatorname{sh}(u) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{2+2 \operatorname{sh}^2(u)}} \sqrt{2} \operatorname{ch}(u)du = \int \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{2(1+\operatorname{sh}^2(u))}} \operatorname{ch}(u)du = \\ & = \int \frac{2 \operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{2}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)}} \operatorname{ch}(u)du = \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{\operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)}} \operatorname{ch}(u)du = \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)}} \operatorname{ch}(u)du \end{aligned}$$

Felhasználjuk a $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ azonosságot:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(u)}} \operatorname{ch}(u)du &= \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{sh}^2(u) + \operatorname{sh}^2(u)}} \operatorname{ch}(u)du = \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{sh}^2(u)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(u)}} \operatorname{ch}(u)du = \\ &= \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{sh}^2(u)}{\operatorname{ch}(u)} \operatorname{ch}(u)du = \sqrt{2} \int \operatorname{sh}^2(u)du \end{aligned}$$

Felhasználjuk a $\operatorname{sh}^2(x) = \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}$ azonosságot:

$$\sqrt{2} \int \operatorname{sh}^2(u)du = \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{ch}(2u)-1}{2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int \operatorname{ch}(2u)du - \int 1du \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\operatorname{sh}(2u)}{2} - u \right) + C$$

Végül behelyettesítünk:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2} \operatorname{sh}(u) \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} &= \operatorname{sh}(u) \Rightarrow u = \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\operatorname{sh}(2u)}{2} - u \right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\operatorname{sh}(2 \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right))}{2} - \operatorname{arsh}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right) + C \end{aligned}$$

$$2: \int \frac{x^3}{\sqrt{3x^2-9}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{3(x^2-3)}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-3}}dx \quad x = \sqrt{3} \operatorname{ch}(u) \\ dx = \sqrt{3} \operatorname{sh}(u)du$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 3}} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \operatorname{ch}^3(u)}{\sqrt{3 \operatorname{ch}^2(u) - 3}} \sqrt{3} \operatorname{sh}(u) du = \int \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \operatorname{ch}^3(u)}{\sqrt{3(\operatorname{ch}^2(u) - 1)}} \operatorname{sh}(u) du = \\ &= \int \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \operatorname{ch}^3(u)}{\sqrt{3} \sqrt{\operatorname{ch}^2(u) - 1}} \operatorname{sh}(u) du = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \int \frac{\operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}^2(u)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(u) - 1}} \operatorname{sh}(u) du = \int \frac{\operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}^2(u)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(u) - 1}} \operatorname{sh}(u) du \end{aligned}$$

Felhasználjuk a $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ azonosságot:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}^2(u)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(u) - 1}} \operatorname{sh}(u) du &= \int \frac{\operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}^2(u)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(u)}} \operatorname{sh}(u) du = \int \operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}^2(u) du = \\ &= \int \operatorname{ch}(u)(1 + \operatorname{sh}^2(u)) du = \int \operatorname{ch}(u) du + \int \operatorname{ch}(u) \operatorname{sh}^2(u) du = \operatorname{sh}(u) + \int \operatorname{ch}(u) \operatorname{sh}^2(u) du \end{aligned}$$

Az utolsó tagra alkalmazva a $\int g^a(u) \cdot g'(u) du = \frac{g^{a+1}(u)}{a+1} + C$ szabályt

(mellékszámítás):

most $g(u) = \operatorname{sh}(u); g'(u) = \operatorname{ch}(u)$

- $\operatorname{sh}(u) + \int_{g'(x)}^{\operatorname{sh}(x)} \operatorname{ch}(u) \operatorname{sh}^2(u) du = \operatorname{sh}(u) + \frac{\operatorname{sh}^3(u)}{3} + C$

Behelyettesítve:

$$x = \sqrt{3} \operatorname{ch}(u) \Rightarrow u = \operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\operatorname{sh}(u) + \frac{\operatorname{sh}^3(u)}{3} = \operatorname{sh}\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) + \frac{\operatorname{sh}^3\left(\operatorname{arch}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)}{3} + C$$

$$\begin{aligned} 3: \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx &\quad x = \sqrt{4 \sin^2(u)} = 2 \sin(u) \\ &\quad dx = 2 \cos(u) du \\ \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{8 \sin^3(u)}{\sqrt{4-4 \sin^2(u)}} 2 \cos(u) du = \int \frac{8 \sin^3(u)}{\sqrt{4(1-\sin^2(u))}} 2 \cos(u) du = \\ &= \int \frac{8 \sin^3(u)}{2\sqrt{1-\sin^2(u)}} 2 \cos(u) du \end{aligned}$$

Felhasználjuk a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ azonosságot:

$$\begin{aligned} \int \frac{8 \sin^3(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} \cos(u) du &= \int \frac{8 \sin^3(u)}{\cos(u)} \cos(u) du = 8 \int \sin^3(u) du = 8 \int \sin(u) \sin^2(u) du = \\ &= 8 \int \sin(u)(1 - \cos^2(u)) du = 8 \int \sin(u) du - 8 \int \cos^2(u) \sin(u) du \end{aligned}$$

Az utolsó tagra alkalmazva a $\int g^a(u) \cdot g'(u) du = \frac{g^{a+1}(u)}{a+1} + C$ szabályt (mellékszámítás):

most $g(u) = \cos(u); g'(u) = -\sin(u)$

- $$\begin{aligned} 8 \int \sin(u) du - 8 \int \cos^2(u) \sin(u) du &= 8 \int \sin(u) du + 8 \int_{g^2(u)}^{g(u)} \cos^2(u) \left(-\sin(u)\right) du = \\ &= -8 \cos(u) + 8 \frac{\cos^3(u)}{3} + C \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$x = 2 \sin(u) \Rightarrow u = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$-8 \cos(u) + 8 \frac{\cos^3(u)}{3} + C = 8 \frac{\cos^3\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{3} - 8 \cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$$

Racionális törtfüggvény integrálás kiegészítés (kitartóbbaknak)

Ha a nevezőnek nincs valós gyöke (*komplex gyökei vannak*), nem tudjuk felbontani elsőfokú tagok szorzatára. Ekkor, ha van x -es tag a számlálóban, bővítéssel ki kell fejezni a nevező deriváltját

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{4x^2+4x+7} dx & \Big|_{g'(x)=8x+4} = \int \frac{1}{8} \frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{4x^2+4x+7} dx = \frac{3}{8} \int \frac{8\left(x+\frac{1}{3}\right)}{4x^2+4x+7} dx = \frac{3}{8} \int \frac{8x+\frac{8}{3}}{4x^2+4x+7} dx = \\ & = \frac{3}{8} \int \frac{8x+4-4+\frac{8}{3}}{4x^2+4x+7} dx = \frac{3}{8} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+7} dx + \frac{3}{8} \int \frac{\frac{8}{3}-4}{4x^2+4x+7} dx = \\ & = \ln|4x^2+4x+7| + \frac{3}{8} \int \frac{\frac{8}{3}-4}{4x^2+4x+7} dx \end{aligned}$$

A második tagot a konstans kiemelése után teljes négyzetté kell alakítani (*mellékszámítás*):

- $\frac{3}{8} \int \frac{\frac{8}{3}-4}{4x^2+4x+7} dx = \left(\frac{8}{3}-4\right) \frac{3}{8} \int \frac{1}{4x^2+4x+7} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{4x^2+4x+7} dx =$
- $= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x+1)^2+6} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{6\left(\frac{(2x+1)^2}{6}+1\right)} dx = -\frac{1}{12} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{6}}\right)^2+1} dx$
- Mivel $\int f(x)dx = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg}(x) + C = F(x) + C$
- és $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \Rightarrow \int f\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) dx = \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)} F\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + C$
- Így:
- $-\frac{1}{12} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2+1} dx = -\frac{1}{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + C$

Behelyettesítve:

$$\int \frac{3x+1}{4x^2+4x+7} dx = \ln|4x^2+4x+7| - \frac{\sqrt{6}}{24} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) + C$$

Integrálás helyettesítéssel kiegészítés (kitartóbbaknak)

Ha az integrálandó függvény valamelyik trigonometrikus függvényben racionális, pl:

$$\int \frac{\operatorname{tg}(x)+1}{1+\sin(x)+\cos(x)} dx, \text{ akkor helyettesítésként javasolható a következő:}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = u \text{ helyettesítéssel:}$$

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \operatorname{tg}(x) = \frac{2u}{1-u^2} \quad \operatorname{ctg}(x) = \frac{1-u^2}{2u}$$

$$x = 2ar \operatorname{ctg}(u) \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg}(x)+1}{1+\sin(x)+\cos(x)} dx &= \int \frac{\frac{2u}{1-u^2} + 1}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \\ &= \int \frac{\frac{2u}{1-u^2} + \frac{1-u^2}{1-u^2}}{\frac{1+u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \\ &= 2 \int \frac{\frac{-u^2 + 2u + 1}{1+u^2}}{\frac{1+u^2 + 2u + 1 - u^2}{1+u^2}} du = \\ &= 2 \int \frac{1+u^2 \cdot (-u^2 + 2u + 1)}{1+u^2 + 2u + 1} du = 2 \int \frac{1+u^2}{(1-u)(1+u)} \cdot \frac{-u^2 + 2u + 1}{2(u+1)} du = \\ &= \int \frac{-u^4 + 2u^3 + u^2 - u^2 + 2u + 1}{(1-u)(1+u)^2} du = \int \frac{-u^4 + 2u^3 + 2u + 1}{(1-u)(1+u)^2} du \end{aligned}$$

A polinomosztás után:

$$\frac{-u^4 + 2u^3 + 2u + 1}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{-u^4 + 2u^3 + 2u + 1}{-u^3 - u^2 + 2u + 1}$$

$$\begin{array}{r} (-u^4 + 2u^3 + 2u + 1) : (-u^3 - u^2 + 2u + 1) = u - 4 + \frac{2u^2 + 9u + 5}{-u^3 - u^2 + 2u + 1} \\ \hline - -u^4 - 2u^3 + 2u^2 + u \\ \hline 4u^3 - 2u^2 + u + 1 \\ \hline - 4u^3 - 4u^2 - 8u - 4 \\ \hline 2u^2 + 9u + 5 \end{array}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int \frac{-u^4 + 2u^3 + 2u + 1}{(1-u)(1+u)^2} dx &= \int \left(u - 4 + \frac{2u^2 + 9u + 5}{-u^3 - u^2 + 2u + 1} \right) dx = \\ &\int u dx - 4 \int 1 dx + \int \frac{2u^2 + 9u + 5}{-u^3 - u^2 + 2u + 1} dx = \frac{u^2}{2} - 4u + \int \frac{2u^2 + 9u + 5}{(1-u)(1+u)^2} dx \end{aligned}$$

Az utolsó tagot a racionális törtfüggvénynél látott módszerrel (*mellékszámítás*):

- $\frac{2u^2 + 9u + 5}{(1-u)(1+u)^2} = \frac{A}{(1-u)} + \frac{B_1}{(1+u)} + \frac{B_2}{(1+u)^2}$
- $2u^2 + 9u + 5 = A(1+u)^2 + B_1(1+u)(1-u) + B_2(1-u)$
- $2u^2 + 9u + 5 = A + 2Au + Au^2 + B_1 - B_1u^2 + B_2 - B_2u$
- $2u^2 = Au^2 - B_1u^2 \Rightarrow 2 = A - B_1 \Rightarrow B_1 = A - 2$
- $9u = 2Au - B_2u \Rightarrow 9 = 2A - B_2 \Rightarrow B_2 = 2A - 9$
- $5 = A + B_1 + B_2 = A + A - 2 + 2A - 9 = 4A - 11$
- $16 = 4A \Rightarrow A = 4 \Rightarrow B_1 = 2 \Rightarrow B_2 = -1$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int \frac{-u^4 + 2u^3 + 2u + 1}{(1-u)(1+u)^2} dx &= \frac{u^2}{2} - 4u + \int \left(\frac{4}{(1-u)} + \frac{2}{(1+u)} + \frac{-1}{(1+u)^2} \right) du = \\ &= \frac{u^2}{2} - 4u + (-4) \int \frac{-1}{\left(\frac{1-u}{g_1(u)} \right)} du + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{1+u}{g_2(u)} \right)} du - \int \frac{1}{g_3(u)} \cdot \left(\frac{1+u}{g_3(u)} \right)^{-2} du = \\ &= \frac{u^2}{2} - 4u - 4 \ln|1-u| + 3 \ln|1+u| - \frac{(1+u)^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{u^2}{2} - 4u - 4 \ln|1-u| + 3 \ln|1+u| + \frac{1}{(1+u)} + C \end{aligned}$$

Behelyettesítve $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = u$ -t:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg}(x)+1}{1+\sin(x)+\cos(x)} dx &= \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2} - 4 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \ln\left|1-\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + 3 \ln\left|1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)} + C \end{aligned}$$