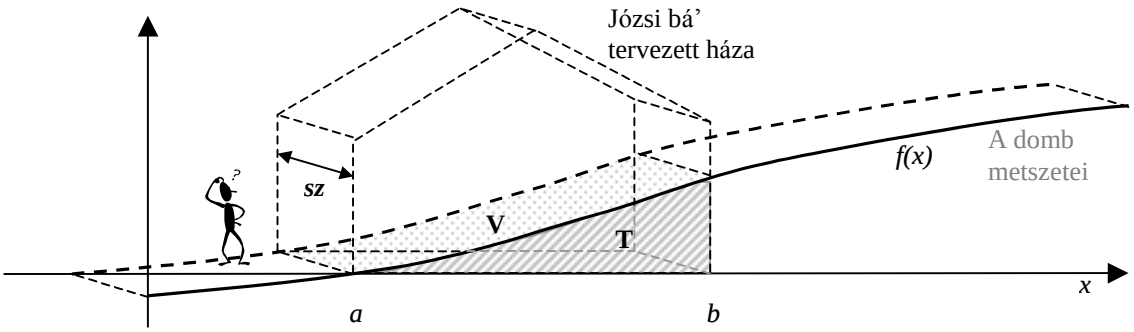
A határozott integrál.

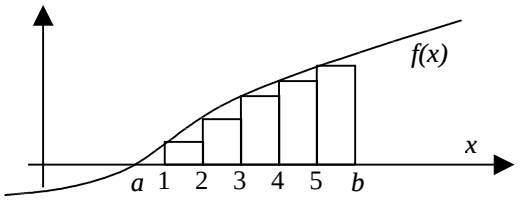
Józsi bá' telke egy domb lábánál fekszik, ide akar házat épíeni. Hogy a ház padlója vízszines legyen, valamennyi földet ki kell lapátolni és elszállítatni. Józsi bá' szertné pontosan tudni, hány m^3 földet kell megmozgatni neki, azaz mekkora a kiásandó föld térfogata. Ha feltételezzük, hogy a domb magassága csak egy (x) irányban változik (*lásd ábra*), akkor a **V**-vel jelölt, **T** alapterületű és ***sz*** magasságú (*így* **T**x***sz térfogatú***) hasábot kell kiásni. Mivel a ház szélessége (***sz***) adott, csak **T**-t kell kiszámítani valahogy.



Józsi bá' a következőképpen okoskodhat:

„Lemérem a domb magasságát *a*-tól *b*-ig pl. méterenként, majd első közelítésben úgy veszem, mintha a domb a következő méterig ugyanolyan magas lenne. Ekkor a T terület:

$$T \cong \sum_a^b 1m \cdot \text{mért magasság} \ (\textit{közelítőleg}).\text{"}$$



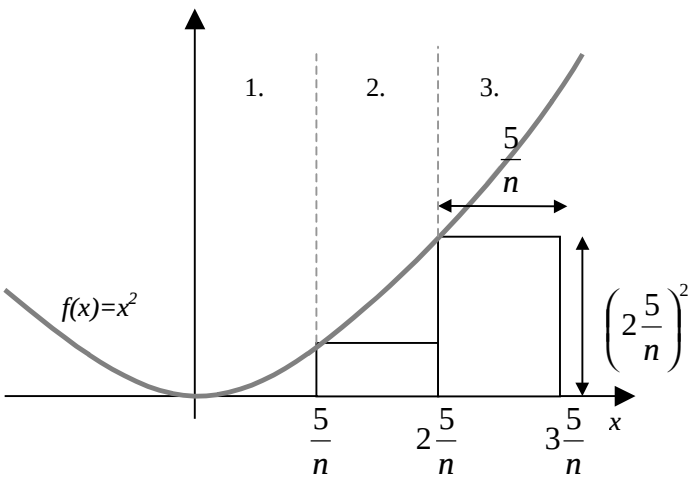
A kis ábrán persze látszik, hogy ez elég durva becslés, pontosítani úgy lehet, ha nem méterenként mérünk és összegzünk, hanem fél, negyed és egyre kisebb távolságonként, tehát finomítjuk az [a,b] intervallum felosztását.

Tekintsük pl. az $f(x)=x^2$ függvényt a [0,5] intervallumban. Számítsuk ki a görbe alatti és a [0,5] intervallum feletti rész területét. Osszuk fel az intervallumot n részre az

$$x_0=0,\ x_1=\frac{5}{n},\ x_2=2\frac{5}{n},\ \ldots,\ x_i=i\frac{5}{n},\ \ldots,\ x_n=n\frac{5}{n}$$

pontokkal (Két osztópont között a távolság: 5/n).
Számítsuk ki az $[x_0, x_1],[x_1, x_2],\ldots,[x_i, x_{i+1}],\ldots,[x_{n-1}, x_n]$ részintervallumok feletti olyan téglalapok területét, amiknek magassága a függvény értéke a részintervallumok bal végpontjában.

Az első téglalap a $\left[0,\frac{5}{n}\right]$ intervallum felett van, melynek területe (a bal végpont függvényérték * az intervallumhossz) $0\cdot\frac{5}{n}$. A második téglalap a $\left[\frac{5}{n},2\frac{5}{n}\right]$ intervallum felett van, melynek területe $\left(\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n}$.



PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

A harmadik téglalap a $\left[2\frac{5}{n},3\frac{5}{n}\right]$ intervallum felett van, melynek területe $\left(2\frac{5}{n}\right)^2\cdot\frac{5}{n}$.

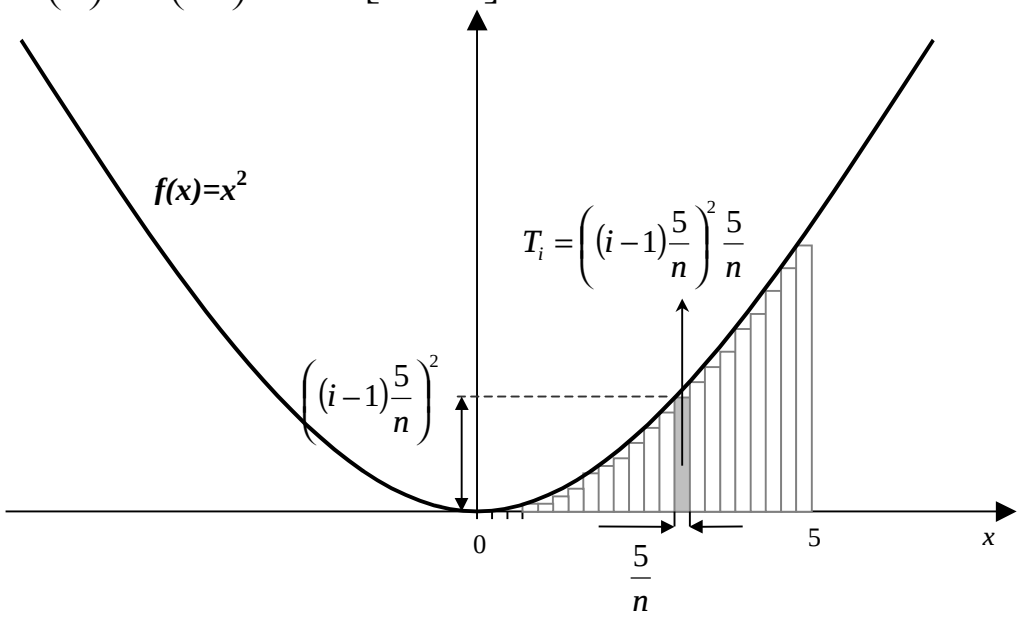
Az *i*-dik téglalap területe:

$$\left((i-1)\left(\frac{5}{n}\right)\right)^2\frac{5}{n}.$$

Adjuk össze ezeket a területeket! Az alábbi összeget kapjuk:

$s_n=f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\ldots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=$

$$=0\frac{5}{n}+\left(\frac{5}{n}\right)^2\frac{5}{n}+\left(2\frac{5}{n}\right)^2\frac{5}{n}+\ldots+\left[(n-1)\frac{5}{n}\right]^2\frac{5}{n}=\frac{5^3}{n^3}\left(1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$



Használjuk fel az első *n* négyzetszám összegére vonatkozó képletet, akkor a következőt kapjuk:

$$s_n=\frac{5^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Finomítsuk a felosztást! Mi történik $n\to\infty$ esetén?

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5^3}{6}\frac{n-1}{n}\frac{2n-1}{n}=\frac{5^3}{6}2=\frac{5^3}{3},\text{ mivel }\frac{n-1}{n}\to1,\frac{2n-1}{n}\to2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az s_n területösszeg egy véges számhoz $5^3/3$-hoz tart. Ezt a számot az x^2 függvény [0,5] intervallumon vett **határozott integrál**jának nevezzük és így jelöljük:

$$\int_0^5 x^2dx.$$

A példában látott módon definiáljuk egy tetszőleges *f(x)* függvénynek egy adott [a,b] intervallumon vett határozott integrálját.

<u>DEFINICIÓ:</u> Legyen *f* az [a,b] intervallumon értelmezett korlátos függvény. Akkor mondjuk, hogy *f* az [a,b] intervallumon **integrálható** és **határozott integrálja I**, ha az [a,b] intervallum tetszés szerinti, minden határon túl finomodó felosztásához tartozó közelítő összegek bármely (I_n) sorozata I-hez konvergál.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

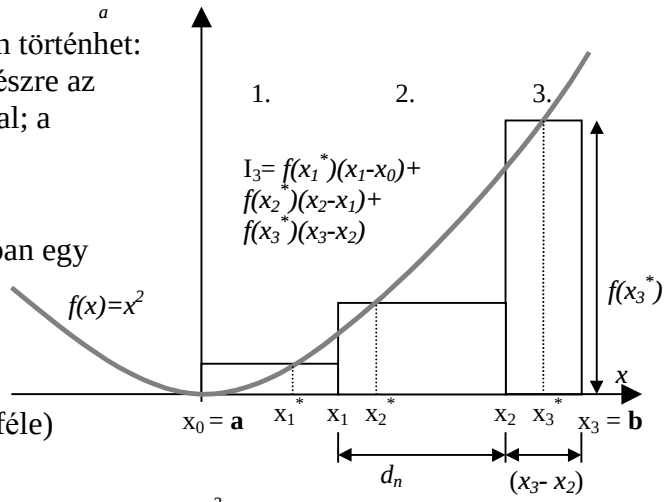
Az *f* függvény (a,b) intervallumon vett határozott integrálját a következőképpen jelöljük:

$\int_a^b f(x)dx$ a: az integrál alsó határa; b: az integrál felső határa;

Ezt az integrált **Riemann-féle integrálnak** is nevezzük.
A határozott integrál egy valós szám, definiálásával valamely [a,b] intervallumon integrálható függvények mindegyikéhez egy-egy valós számot rendelünk (A határozatlan integrál egy függvényhez egy függvényhalmazt rendelt, a primitív függvények halmazát.
Ha *f* az [a,b] intervallumon monoton és korlátos, akkor az említett intervallumon integrálható.

Az [a,b] intervallumon integrálható függvény $\int_a^b f(x)dx$ határozott integráljának kiszámítása a definíció szerint a következő épésekben történhet:

1. Felosztjuk az [a,b] intervallumot *n* részre az $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ osztópontokkal; a felosztás finomsága
$$d_n = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$$
2. Választunk minden részintervallumban egy pontot, legyenek ezek rendre
$$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$$
3. Meghatározzuk az
$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \text{ (Riemann-féle)}$$
közelítő összeget.



Az $f(x)= x^2$ függvény d_n finomságú felosztása és integrálközelítő összege n= 3-ra az [a,b] intervallumon

4. Növeljük az *n* értékét úgy, hogy a felosztás minden határon túl finomodjon, és meghatározzuk a
$$\lim_{d_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$
határértéket.

A határozott integrál tulajdonságai:

- Ha az *f* függvény az [a,b] intervallumon integrálható és *c* valós szám, akkor *cf* is integrálható itt, és
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$
- Ha az *f* és *g* függvények integrálhatók az [a,b] intervallumon, akkor *f*+*g* is integrálható itt és
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$
- Ha *f* integrálható az [a,b] intervallumon, akkor
$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \text{ és } \int_a^a f(x)dx = 0$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

- Ha az *f* függvény az [a,b] intervallumon integrálható, akkor integrálható bármely részintervallumán is és

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{, ahol } c \in [a,b]$$

- Ha *f* integrálható az [a,b] intervallumon és nem negatív, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

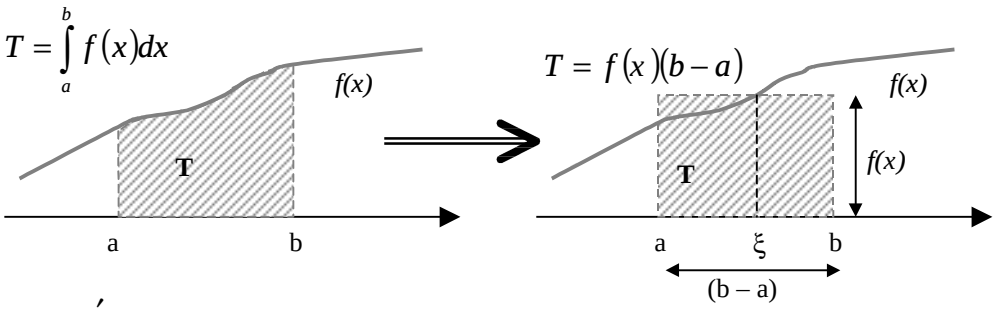
- Ha *f* integrálható az [a,b] intervallumon és nem pozitív, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

- Ha *f(x)* véges sok pont kivételével folytonos és korlátos az [a,b] intervallumon, akkor a határozott integrál létezik.

- Ha *f(x)* folytonos [a,b]-n, akkor létezik olyan $x \in [a,b]$, amelyre

$$\int_a^b f(x)dx = f(x)(b-a) \quad \text{-középértéktétel}$$



§ $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x), x \in [a,b]$

<u>Newton-Leibniz formula:</u> Ha *f* integrálható az [a,b] intervallumon és *F* primitív függvénye ezen intervallumon *f*-nek, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \textbf{(Newton-Leibniz formula.)}$$

Az $\int_a^b f(x)dx$ határozott integrál kiszámításának egy (*a legtöbbször alkalmazott*) módja ez alapján:

1. Az $\int f(x)dx$ határozatlan integrál kiszámítása
2. A kiszámolt primitív függvényt behelyettesíteni *a* és *b* helyen, majd képezni ezek különbségét.

Pl_1:

$\int_1^2 \cos(x)dx$ kiszámítása:

1. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

2. $\int_1^2 \cos(x)dx = \sin(2) + C - (\sin(1) + C) = \sin(2) - \sin(1) \approx 0.0678$ *mivel ugyanannak a függvénynek kell a behelyettesítési értékeit venni az integrálási határokon, a C-k is ugyanazok, ezért kiesnek.*

Pl_2:

$\int_1^2 \ln(x)dx$ kiszámítása:

1. $\int \ln(x)dx$ felhasználva a parciális integrálás szabályát:

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} - \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx = x \cdot \ln(x) - \int 1dx = x \cdot \ln(x) - x = x \cdot (\ln(x) - 1) + C$$

2. $\int_1^2 \ln(x)dx = 2 \cdot (\ln(2) - 1) - 1 \cdot (\ln(1) - 1) \approx 0.387$

<u>Improprius integrálok:</u>

A határozott integrál fogalmát véges intervallumon és ott korlátos függvényekre definiáltuk. Ebben a pontban a határozott integrál fogalmát kiterjesztjük azokra az esetekre, amikor

a. az intervallum végtelen;
b. az integrandus az adott intervallumon nem korlátos.

<u>DEFINICIÓ:</u> Legyen *f* értelmezve az [a,∞) intervallumon, és annak bármely véges [a,v] részintervallumán integrálható.

Ha a $\lim_{v\to\infty} \int_a^v f(x)dx$ határérték létezik, akkor ezt a határértéket az *f* függvény [a,∞) intervallumon vett **impoprius integráljának** nevezzük.

Jele: $\int_a^\infty f(x)dx$

Pl_1:

$\int_0^\infty e^{-x}dx$ kiszámítása:

1. $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$

2. $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left(\left(-e^{-b}\right) - \left(-e^{-0}\right) \right)$

$$\lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b}\right) - \left(-e^{0}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b}\right) + \left(e^{0}\right) = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b}\right) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Hasonlóan definiálhatók az

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{u\to-\infty} \int_u^b f(x)dx \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{\substack{u\to-\infty \\ v\to\infty}} \int_u^v f(x)dx$$

impoprius integrálok, ha a határértékek léteznek.

Továbbá hasonlóan definiálhatók az

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a} \int_u^b f(x)dx, \int_a^b f(x)dx = \lim_{v\to b} \int_u^b f(x)dx, \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{u\to a \\ v\to b}} \int_u^v f(x)dx$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

impoprius integrálok, ha *f(x)* nem korlátos *a* és/vagy *b* helyen, és a fenti határértékek léteznek.

Pl_2:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$
2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{a\to -1\\ b\to 1}} \int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{a\to -1\\ b\to 1}} (\arcsin(b) - \arcsin(a)) =$

   $= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2}\right) = p$

Véges határérték létezése esetén **konvergens** ellenkező esetben **divergens impoprius** integrálról beszélünk.

Pl_3:

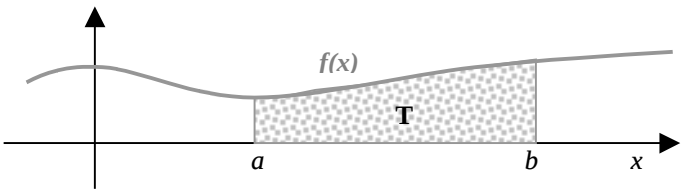
$\int_{0}^{2} \frac{1}{x}\,dx$ kiszámítása:

1. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$
2. $\int_{0}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0} \int_{a}^{2} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0}((\ln(2)) - (\ln(a))) = \ln(2) - \lim_{a\to 0}(\ln(a))$

   Mivel az ln(*x*) függvénynek a *0* helyen nem létezik véges határértéke, ezért az $\int_{0}^{2} \frac{1}{x}\,dx$ impoprius integrál divergens.

<u>Területszámítás:</u> Ha *f* az [a,b] intervallumon folytonos és nem negatív, akkor az *f* függvény és az [a,b] intervallum által meghatározott terület (*ha az x tengely allatti területek - előjelűek*)

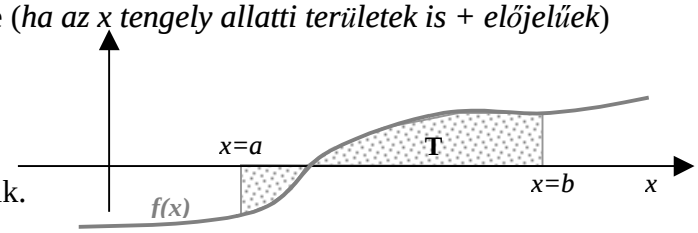
$$T = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$



Az *y=f(x)* egyenletű görbe, az [a,b] intervallum, valamint az *x=a* és *x=b* egyenesek által határolt síkidom területe (*ha az x tengely allatti területek is + előjelűek*)

$$T = \int_{a}^{b} |f(x)|\,dx$$

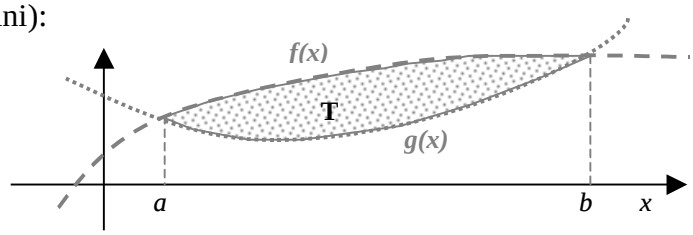
ha ez a határozott vagy impoprius integrál létezik.



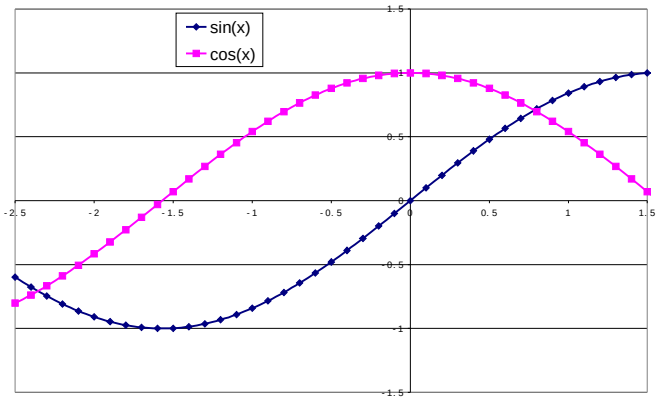
PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Az *y=f(x)* egyenletű görbe és az *y=g(x)* egyenletű görbe által határolt síkidom területe: (a két görbe az *f(a)=g(a)* és *f(b)=g(b)* egyenletek alapján *a* és *b* helyen metszi egymást, így az [a,b] intervallumon kell integrálni):

$$T = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$



Pl. az *f(x)* = cos*(x)* és a *g(x)* = sin*(x)* görbék közötti területet kell kiszámolni (ábra)



Először az integrálási határokat kell megállapítani. Ezt a sin*(x)* = cos*(x)* egyenlet megoldásával kapjuk meg:

$\sin(x) = \cos(x)$ mivel láthatóan a cos*(x) = 0* nem megoldás (*ekkor a sin(x) vagy 1 vagy -1*), oszthatunk cos*(x)*-el.

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \mathrm{tg}(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{p}{4} = b \\ x_2 = -\dfrac{3p}{4} = a \end{cases}$$

Tehát a terület:

$$T = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_{\frac{-3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \left(\cos(x) - \sin(x)\right)dx = \int_{\frac{-3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \cos(x)dx - \int_{\frac{-3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \sin(x)dx$$

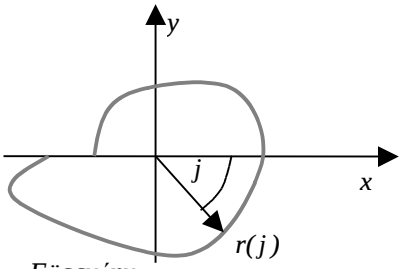
1. $\int \cos(x)dx - \int \sin(x)dx = \sin(x) - \left(-\cos(x)\right) = \sin(x) + \cos(x) + C$

2. $$\int_{\frac{-3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \cos(x)dx - \int_{\frac{-3p}{4}}^{\frac{p}{4}} \sin(x)dx = \left(\sin\left(\frac{p}{4}\right) + \cos\left(\frac{p}{4}\right)\right) - \left(\sin\left(\frac{-3p}{4}\right) + \cos\left(\frac{-3p}{4}\right)\right) =$$

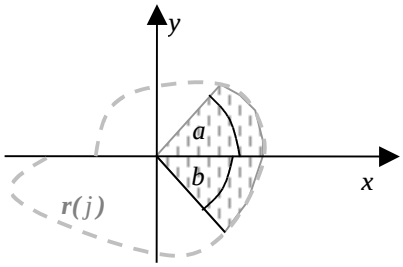
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

<u>A szektor területe:</u> Legyen r az $[\alpha,\beta] \subset [0,2\pi]$ intervallumon nem negatív folytonos függvény. A síkbeli polár koordinátarendszerben az $r=r(j)$ egyenletű görbe, valamint a $\varphi=\alpha$ és $\varphi=\beta$ egyenletű félegyenesek által határolt síkidomot az r függvény és az $[\alpha,\beta]$ intervallum által meghatározott **szektornak** nevezzük.



Függvény polárkoordinátarendszerben ábrázolva

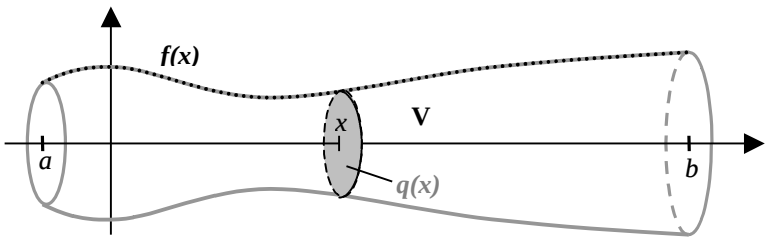


Szektor

Legyen r a $0 \le a < b \le 2\pi$ intervallumon folytonos nem negatív függvény. Az r függvényhez és az [a,b] intervallumhoz tartozó szektor területe

$$T=\frac{1}{2}\int_a^b r^2(j)\,dj$$

<u>Forgástest térfogata:</u> A térbeli derékszögű koordinátarendszerben elhelyezett test minden pontjának x koordinátája legyen az [a,b] intervallumban. Az [a,b] intervallumon értelmezett q függvény x_0 Î $[a,b]$ helyen felvett értéke legyen az $x=x_0$ sík által a testből kimetszett síkidom területe. Ezzel azt is feltételeztük, hogy minden ilyen síkmetszetnek létezik a területe. Ha a q függvény integrálható az [a,b] intervallumon, akkor azt mondjuk, hogy a testnek létezik térfogata és az a



$$V=\int_a^b q(x)\,dx$$ határozott integrállal egyenlő.

A definiciónak nagyon fontos következménye a **Cavalieri-féle elv** :
Két test térfogata egyenlő, ha

a. két párhuzamos (s_a és s_b) sík között helyezkedik el;
b. mindkét testnek van térfogata;
c. bármely az adott síkokkal párhuzamos sík azonos területű síkidomot metsz ki belőlük (ezzel azt is feltételeztük, hogy ezen síkidomoknak létezik a területe).

Az [a,b] intervallumon értelmezett f függvény grafikonját forgassuk meg az x tengely körül. Az így keletkezett felületet az f függvényhez és [a,b] intervallumhoz tartozó **forgásfelületnek** nevezzük. E felület és az a illetve b pontokon átmenő, az x tengelyre merőleges síkok által határolt test, az f függvényhez és az [a,b] intervallumhoz tartozó **forgástest.**

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

TÉTEL: Ha az f^2 függvény az [a,b] intervallumon integrálható, akkor az f függvényhez és az [a,b] intervallumhoz tartozó forgástest térfogata

$$V = p\int_a^b f^2(x)dx \ .$$

A tételben szereplő integrál lehet impoprius is, ha az konvergens.

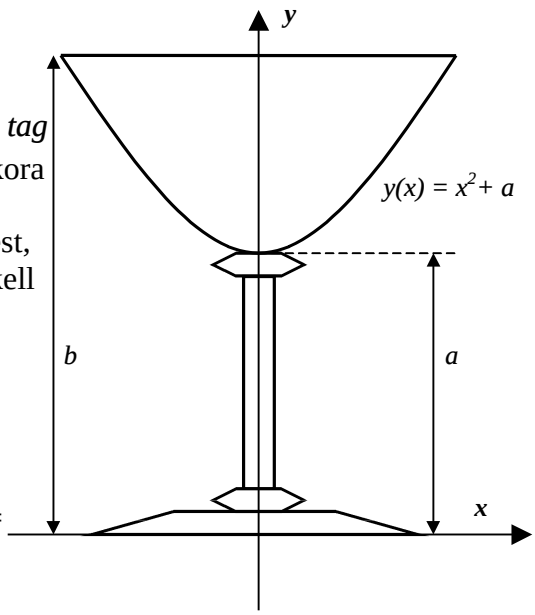
Pl_1:

Az ábrán látható serleg „poharának” falát az $y(x) = x^2 + a$ egyenletű görbe határolja (*a „+ a” tag azt jezi, hogy a serleg „nyaka” „a” magas*). Mekkora a serleg térfogata?

Mivel a serleg az *y* tengely körül forgatott forgástest, *y* szerint kell integrálni *a*-tól *b*-ig. Ehhez *y(x)*-t át kell alakítani *x(y)*-á:

$$y(x) = x^2 + a \Rightarrow x(y) = \sqrt{y-a}$$

Ha a serleg falvastagságát elhanyagoljuk:



$$V = p\int_a^b (x(y))^2 dy = p\int_a^b \sqrt{y-a}^{\,2}\, dy = p\int_a^b (y-a)dy =$$

$$= p\int_a^b ydy - p\int_a^b ady = \left[p\,\frac{y^2}{2} - p\cdot a\cdot y\right]_a^b =$$

$$= \left(p\,\frac{b^2}{2} - p\cdot a\cdot b\right) - \left(p\,\frac{a^2}{2} - p\cdot a\cdot a\right)$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com