Függvények határértékei

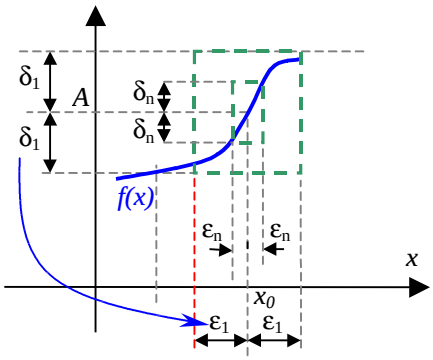
A függvényvizsgálathoz néhány definíció:

Függvény értelmezési tartománya:	Az(ok) az intervallum(ok), ahol a függvényt megadjuk, vagy ahol a függvény értékét a függvény definíciója (képlete) alapján egyértelműen ki tudjuk számítani.
Függvény értékkészlete:	Az(ok) az intervallum(ok), mely(ek)ből a függvény az értékeit felveheti.
Függvény parossága:	Páros a függvény, ha $f(-x) = f(x)$, azaz a grafikonja az $x = 0$–ra tükrözhető. (pl. x^2, cos(x)) Páratlan a függvény, ha $-f(-x) = f(x)$, azaz a grafikonja az *origó*ra középpontosan szimmetrikus. (pl. x^3, sin(x)) Ha ezen feltételek egyike sem teljesül, akkor a függvény nem páros és nem páratlan (*ez így egy tulajdonság!*)

Válasszuk az x_1 értéket x_0-hoz tetszőleges közel az *f(x)* értelmezési tartományban. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan viselkedik az *f(x)* függvény ezen x_1 értékekre. Előfordulhat, hogy az ilyen x_1-ekre (amelyek tehát az x_0 helyhez tetszőlegesen közel lettek választva) az *f(x)* értékek egy jól meghatározott *A* szám közelébe esnek. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az *f(x)* függvénynek az x_0 helyen létezik határértéke és az *A*-val egyenlő.

Tekintsünk egy *f(x)* függvényt és egy $x_0 \in R$ valós számot. Akkor mondjuk, hogy az *f(x)* függvénynek az x_0 helyen a **határértéke** *A*, ha *A* körül tetszőleges δ sugarú környezetet kiválasztva tudunk találni x_0 körül olyan ε sugarú környezetet, amire igazak a következők:

1. Az $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ és az $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumok az *f(x)* függvény értelmezési tartományába esnek.
2. Az $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ és az $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumokban $A - \delta \le f(x) \le A + \delta$.
3. Ha $\delta \to 0$, akkor $\varepsilon \to 0$.



Ez az un. Cauchy-féle függvényhatárérték definíció.

Az ábrán a jobb oldali határ (függőleges szürke szaggatott) kijelölésében az 1. pont, a bal oldali határ (függőleges szürke szaggatott) kijelölésében a 2. pont játszott szerepet; az e_1 -t az x_0 ponthoz közelebbi jelöli ki, ezért a bal oldali határ most a függőleges piros szaggatott lesz.
d és e kijelöl egy téglalapot (zöld szaggatott) a függvény ezen belül nem lehet „hiányos” és nem lóghat belőle ki fügőleges irányban.
Határértéke akkor van az adott pontban a függvénynek, ha bármilyen kicsi d-hoz mindig találunk megfelelő e-t, és ha $d_1 > d_2$, akkor e_1 ³ e_2.

Másképp (nem tudom ki féle definíció):

A függvény határértéke az x_0 helyen:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, ha **tetszőleges** x_n sorozatra, melyre $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, a $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ teljesül.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Attól függően, hogy a választott x_n sorozat hogyan tart x_0-hoz beszélhetünk

- Bal oldali határértékről: ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, de $x_n < x_0$.

  A jele $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$

- Jobb oldali határértékről: ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, de $x_n > x_0$.

  A jele $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = A$ vagy $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$

A függvény határértékének vizsgálatakor
A függvény határértéke tehát sorozathatárértékkel van definiálva.
Példák:

$f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, állapítsuk meg $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$ és $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = ?$ értékeit!

a: Vegyük fel az $x_n = \dfrac{1}{n}$ sorozatot, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ és $x_n > 0$ (jobb oldali határérték)!

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2+0} = \dfrac{1}{2}$

Vegyük fel az $x_n = -\dfrac{1}{n}$ sorozatot, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ és $x_n < 0$ (bal oldali határérték)!

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$

Látható, hogy az $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ függvénynek az *x=0* helyen a jobb és bal oldali határértéke megegyezik ami megegyezik a helyettesítési (képletéből kijövő) értékével.

b: Vegyük fel az $x_n = \dfrac{1}{n} - 2$ sorozatot, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$ és $x_n > -2$ (jobb oldali határérték)!

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\left(\frac{1}{n}-2\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2-2+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Vegyük fel az $x_n = -\dfrac{1}{n} - 2$ sorozatot, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$ és $x_n < -2$ (bal oldali határérték)!

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2+\left(-\frac{1}{n}-2\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2-2-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$

Látható, hogy az $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ függvénynek az *x= -2* helyen a jobb és bal oldali határértéke nem véges és még csak meg sem egyeznek (a helyettesítési (képletéből kijövő) értékéről most nincs értelme beszélni, hiszen a függvény az *x= -2* helyen nincs értelmezve).

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Műveletek függvények határértékeivel (bizonyítás nélkül)

Ha adottak *f(x)* és *g(x)* x_0-ban konvergens függvények, melyeknek határértéke F és G, akkor:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=F+G \qquad \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=F-G$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot F \qquad \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=F\cdot G \qquad \lim_{x\to x_0}\left(f(x)^k\right)=F^k$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{F}{G}\Big|ha_G\neq 0 \qquad \lim_{x\to x_0}\left(\sqrt[k]{f(x)}\right)=\sqrt[k]{F}\Big|ha_f(x)\geq 0; F\geq 0$$

$\lim_{x\to x_0}\left(f(g(x))\right)=f\left(\lim_{x\to x_0}(g(x))\right)=f(G)$, ha *f* folytonos *G* helyen.

Nevezetes függvényhatárértékek

Léteznek bizonyos elemi sorozatok, melyeknek határértékét már korábban kiszámították, és amelyekből a legtöbb függvényhatárérték felépíthető.

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ $\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ $\quad \lim_{x\to\infty}(x)=\infty$,de $\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$, azaz nincs véges határérték

$\lim_{x\to x_0}(c)=c$ $\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=1$ $\quad \lim_{x\to\infty}\left(e^x\right)=\infty$ $\quad \lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)=0$

Az y=f(x) függvény folytonossága:

A **folytonos**ság a függvénynek pontbeli tulajdonsága. Azt mondjuk, hogy a *f(x)* függvény az értelmezési tartományának x_0 pontjában folytonos, ha létezik x_0-nak olyan környezete, amely beletartozik az *f(x)* értelmezési tartományába, továbbá x_0-ban *f(x)*-nek megegyezik a jobb és a bal oldali határértéke, ami véges és megegyezik az x_0-ban vett behelyettesítési értékkel, azaz

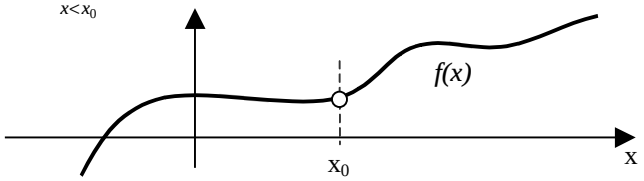
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=f(x_0)$$

Valamely *f(x)* függvényt egy intervallumban folytonosnak nevezünk, ha annak minden pontjában folytonos.

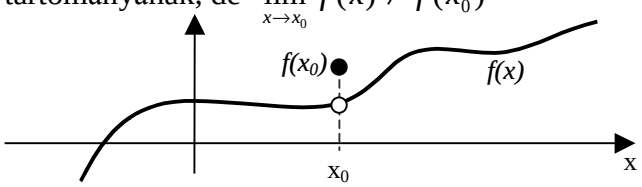
Végül az *f(x)* függvényt magát folytonosnak nevezzük, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Ha az *f(x)* függvény valamely x_0 helyen a következőképpen viselkedhet:

- **Folytonos**, ha (lásd fent)
- **hézagpontja** van, ha $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ létezik és véges, de *a* nem eleme az *f(x)* értelmezési tartományának

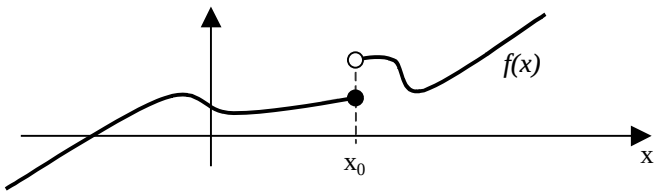


- **megszüntethető szakadási hely**, ha $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ létezik és véges, továbbá *a* eleme az értelmezési tartományának, de $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$



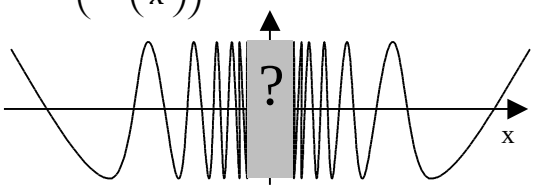
PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

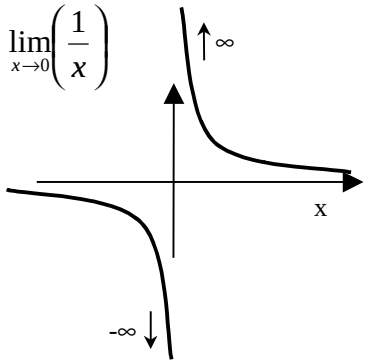
– **ugrása van**, ha létezik jobb és bal oldali határérték, de nem egyenlő



– **lényeges szingularitása van**, ha nem létezik a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ véges határérték.

Pl. $\lim_{x\to 0}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ és $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$





Példák, megoldási módszerek

Az általában előforduló egyszerű függvényeknél, ha az x_0 benne van az értelmezési tartományában, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Racionális törtfüggvény (polinomok hányadosa):

$$f(x) = \frac{sz_k \cdot x^k + sz_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + sz_1 \cdot x + sz_0}{h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \ldots + h_1 \cdot x + h_0}$$

A racionális törtfüggvény határértékét háromféle helyen kellhet számítani:

- x®¥ , illetve x®-¥ ; a módszer hasonlít a racionális tört sorozatok határértékének számításához
- x®x_0 , és x_0 eleme az értelmezési tartománynak; egyszerűen behelyettesítünk x_0-t
- x®x_0 , és x_0 nem eleme az értelmezési tartománynak; ekkor x_0 a nevező egyik gyöke (0 helye). A nevezőt fel kell bontani gyöktényezős alakra (ism: $h_g \cdot x^g + h_{g-1} \cdot x^{g-1} + \ldots + h_1 \cdot x + h_0 = h_g \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_g)$, ahol $x_1, x_2, \ldots x_g$ a nevező g darab gyöke, melyekből az egyik megegyezik x_0 -al) Ekkor is két eset lehetséges:
  - a számláló nem 0 de véges SZ érték az x_0 helyen. A törtet átrendezzük:

    $$f(x) = \frac{SZ}{h_g \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_g)} \cdot \frac{1}{x - x_0} = const \cdot \frac{1}{x - x_0}$$ illetve ha x_0 m-szeres gyök, $$f(x) = \frac{SZ}{h_g \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_g)} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^n} = const \cdot \frac{1}{(x - x_0)^n}$$

    Ekkor felvesszük az $x_n = \frac{1}{n} + x_0$ sorozatot és képezzük az $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ jobb oldali függvényhatárértéket, továbbá felvesszük az $x_n = -\frac{1}{n} + x_0$ sorozatot és képezzük az $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ bal oldali függvényhatárértéket.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

- a számláló 0 az x_0 helyen. Ekkor x_0 a számlálónak is egyik gyöke. A számlálót is gyöktényezőkre bontjuk, majd a tötret átrendezzük:

  $$f(x)=\frac{sz_k\cdot(x-x_{s1})\cdot(x-x_{s2})\cdot\ldots\cdot(x-x_{sk})}{h_g\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_g)}\cdot\frac{x-x_0}{x-x_0}=const\cdot\frac{x-x_0}{x-x_0}$$ így

  $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=const$, mert a határértékképzésnél $x\neq x_0$ csak tart hozzá, ezért egyszerűsíthetünk. Ha x_0 m-szeres gyök a számlálóban és/vagy z-szeres gyök a nevezőben, $f(x)=\frac{sz_k\cdot(x-x_{s1})\cdot(x-x_{s2})\cdot\ldots\cdot(x-x_{sk})}{h_g\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_g)}\cdot\frac{(x-x_0)^m}{(x-x_0)^z}=const\cdot\frac{(x-x_0)^m}{(x-x_0)^z}$

  Ekkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=const\cdot(x-x_0)^{m-z}$ ami:

  - *0* ha m > z
  - *const* ha m = z
  - Ha m > z felvesszük az $x_n=\frac{1}{n}+x_0$ sorozatot és képezzük az $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ jobb oldali függvényhatárértéket, továbbá felvesszük az $x_n=-\frac{1}{n}+x_0$ sorozatot és képezzük az $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ bal oldali függvényhatárértéket.

Például:

1: $f(x)=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{2x^4-9x^3-5x^2+2x+7}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))=A=?$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))=A=?$

$$f(x)=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{2\mathbf{x^4}-9x^3-5x^2+2x+7}\cdot\frac{\frac{1}{\mathbf{x^4}}}{\frac{1}{\mathbf{x^4}}}=\frac{-3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}+5\cdot\frac{1}{x^3}-7\cdot\frac{1}{x^4}}{2-9\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x^3}+7\cdot\frac{1}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}+5\cdot\frac{1}{x^3}-7\cdot\frac{1}{x^4}}{2-9\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x^3}+7\cdot\frac{1}{x^4}}\right)=\frac{-0+0+0-0}{2-0-0+0+0}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}+5\cdot\frac{1}{x^3}-7\cdot\frac{1}{x^4}}{2-9\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x^3}+7\cdot\frac{1}{x^4}}\right)=\frac{-0+0+0-0}{2-0-0+0+0}=0$$

2:

$f(x)=\frac{-8x^4-3x^3+2x^2+5x-7}{2x^4-9x^3-5x^2+2x+7}$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))=A=?$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x))=A=?$

$$f(x)=\frac{-8x^4-3x^3+2x^2+5x-7}{2\mathbf{x^4}-9x^3-5x^2+2x+7}\cdot\frac{\frac{1}{\mathbf{x^4}}}{\frac{1}{\mathbf{x^4}}}=\frac{-8-3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}+5\cdot\frac{1}{x^3}-7\cdot\frac{1}{x^4}}{2-9\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x^3}+7\cdot\frac{1}{x^4}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-8-3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}+5\cdot\frac{1}{x^3}-7\cdot\frac{1}{x^4}}{2-9\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x^3}+7\cdot\frac{1}{x^4}}\right)=\frac{-8-0+0+0-0}{2-0-0+0+0}=-4$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-8-3\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}+5\cdot\frac{1}{x^3}-7\cdot\frac{1}{x^4}}{2-9\cdot\frac{1}{x}-5\cdot\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x^3}+7\cdot\frac{1}{x^4}}\right)=\frac{-8-0+0+0-0}{2-0-0+0+0}=-4$$

3:

$$f(x)=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5x^2+2x+7}\qquad \lim_{x\to\infty}(f(x))=A=?;\ \lim_{x\to-\infty}(f(x))=A=?$$

$$f(x)=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5\mathbf{x}^2+2x+7}\cdot\frac{\frac{1}{\mathbf{x}^2}}{\frac{1}{\mathbf{x}^2}}=\frac{-3\cdot x+2+5\cdot\frac{1}{x}-7\cdot\frac{1}{x^2}}{-5+2\cdot\frac{1}{x}+7\cdot\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-3\cdot x+2+5\cdot\frac{1}{x}-7\cdot\frac{1}{x^2}}{-5+2\cdot\frac{1}{x}+7\cdot\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{-\infty+2+0+0}{-5+0+0}(=\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3\cdot x+2+5\cdot\frac{1}{x}-7\cdot\frac{1}{x^2}}{-5+2\cdot\frac{1}{x}+7\cdot\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{-(-\infty)+2+0+0}{-5+0+0}(=-\infty)$$

4:

$$f(x)=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5x^2+2x+7}\qquad \lim_{x\to1}(f(x))=A=?;\ \lim_{x\to-1}(f(x))=A=?$$

Mivel a nevező gyökei –1 és 1.4; *x®1*-re behelyettesítéssel

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5x^2+2x+7}\right)=\frac{-3\cdot1^3+2\cdot1^2+5\cdot1-7}{-5\cdot1^2+2\cdot1+7}=\frac{-3}{4}$$

x®-1-re:

$$f(x)=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5x^2+2x+7}=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5(x-1.4)(x+1)}=\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5(x-1.4)}\cdot\frac{1}{(x+1)}$$

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{-3x^3+2x^2+5x-7}{-5(x-1.4)}\cdot\frac{1}{(x+1)}\right)=\frac{-3\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)-7}{-5\cdot(-1-1.4)}\cdot\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{(x+1)}\right)=$$

$$=\frac{-7}{12}\cdot\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{(x+1)}\right)$$

jobb oldalról $x_n=\frac{1}{n}-1$

$$\frac{-7}{12}\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n+1}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{n}-1\right)+1}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}(n)=-\infty$$

bal oldalról $x_n=-\frac{1}{n}-1$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\frac{-7}{12}\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n+1}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{n}-1\right)+1}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{-\frac{1}{n}}\right)=\frac{-7}{12}\lim_{n\to\infty}(-n)=\infty$$

A függvénynek a –1 helyen lényeges szingularitása van

5:

$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}\right)$ Mivel az x = 2 hely a számlálónak és a nevezőnek is gyöke:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+4)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(2+3)}{(x-2)(2+4)}\right)=\frac{5}{6}\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)}{(x-2)}\right)=\frac{5}{6}$$

Az x = 2 helyen a függvénynek hézagpontja van.

Speciális szinuszfüggvények:

Ezekben a $\lim_{valami\to 0}\left(\frac{\sin(valami)}{valami}\right)=1$ összefüggést alkalmazzuk.

Példák:

6:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{7x}\right)=?$ Át kell alakítanunk:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{7x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{7x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{3}{7}\right)=\frac{3}{7}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)=\frac{3}{7}$$

7:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{\sin(7x)}\right)=?$ Át kell alakítanunk:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{\sin(7x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot 7x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(7x)}{7x}}\cdot\frac{3}{7}\right)=\frac{3}{7}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(7x)}{7x}}\right)=$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{7x}\right)}=\frac{3}{7}$$

Összetett függvények

8: $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x-2}};\lim_{x\to 3}(f(x))=?$

Ha összetett függvényként kezeljük, a következő módon bomthatjuk fel:

A külső *f* függvény a gyökvonás. Ennek közvetlen változója nem tisztán az *x* hanem egy függvény, nevezzük el mondjuk *g*-nek:

$f(g)=\sqrt{g}$ Az értelmezési tartomány *g*-re (a gyökvonás miatt): $g\geq 0$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

A *g* függvény a reciprokfüggvény. Ennek közvetlen változója nem tisztán az *x* hanem egy függvény, nevezzük el ezt is, mondjuk *v*-nek:

$g(v)=\frac{1}{v}$ Az értelmezési tartomány *v*-re (a reciprok miatt): $v \neq 0$

Az értelmezési tartomány *v*-re (a gyökvonás miatt): $\frac{1}{v} \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$

A kettőből: $v > 0$

A *v* függvény egy polinom, melynek közvetlen változója *x*.

$v(x)=x-2$ Az értelmezési tartomány x-re: $x \in \mathrm{R}$

Az értelmezési tartomány *x*-re (az előzőből): $x-2>0 \Rightarrow x>2$

A kettőből: $x > 2$

Az *f* függvény értelemezési tarományában a kért határérték benne van, ezért:

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{\frac{1}{x-2}}\right)=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}}=\sqrt{\frac{1}{\lim_{x\to 3}(x-2)}}=\sqrt{\frac{1}{3-2}}=1$$

9: $f(x)=3^{\frac{\sin(x)}{x}}; \lim_{x\to 0}(f(x))=?$

A külső *f* függvény a hatványozás. Ennek közvetlen változója nem tisztán az *x* hanem egy függvény, nevezzük el mondjuk *g*-nek:

$f(g)=3^g$ Az értelmezési tartomány *g*-re (a gyökvonás miatt): $g \in \mathrm{R}$

A *g* függvény a $\frac{\sin(x)}{x}$ függvény. Ennek közvetlen változója az *x*:

$g(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ Az értelmezési tartomány *x*-re (a reciprok miatt): $x \neq 0$

Az *f* függvény határértékét a *g* függvény egy hézagpontjában kérik. Akkor létezik ez a határérték, ha *g(x)*-nek van ott határértéke, és ez az érték benne van *f* értelemezési tarományában:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ és *f* minden valós számra értelmezve van, így az 1-re is:

$$\lim_{x\to 0}3^{\frac{\sin(x)}{x}}=3^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}}=3^1=3$$

Gyakran fordul elő, hogy egy függvényhatárértéket nem tudunk kiszámítani, mert az adott x_0 pontban 0/0 vagy ∞/∞ vagy $\infty \cdot 0$ alakú transzcendens (algebrailag nem számítható, táblázatosan vagy közelítő számítással megadott) függvény. Ezekkel it most nem foglalkozunk, a megoldásukhoz a differenciálszámítás L'Hospital szabályát foglyuk használni a későbbiekben.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com