Derivál példák

1: $y(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}=x^{-\frac{2}{3}}+2x^{-\frac{3}{4}}$

$$(y(x))'=\left(x^{\frac{-2}{3}}\right)'+2\left(x^{\frac{-3}{4}}\right)'=\frac{-2}{3}x^{\frac{-2}{3}-1}+2\frac{-3}{4}x^{\frac{-3}{4}-1}=\frac{-2}{3}x^{\frac{-5}{3}}+\frac{-3}{2}x^{\frac{-7}{4}}$$

2: $y(x)=e^x\cdot\sqrt[3]{x-5x^2}$

$$(y(x))'=(e^x)'\cdot\sqrt[3]{x-5x^2}+e^x\cdot\left(\sqrt[3]{x-5x^2}\right)'=e^x\cdot\sqrt[3]{x-5x^2}+e^x\cdot\left(\sqrt[3]{x-5x^2}\right)'$$

§ $\left(\sqrt[3]{x-5x^2}\right)'=f'(x)$ összetett függvény: A külső függvény a köbgyök.

§ $f(g)=\sqrt[3]{g}=g^{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $f'(g)=\frac{1}{3}g^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}g^{\frac{-2}{3}}$

§ $g(x)=x-5x^2$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $g'(x)=1-10x$

§ $f'(x)=\frac{1}{3}g^{\frac{-2}{3}}\cdot(1-10x)=\frac{1}{3}\left(x-5x^2\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot(1-10x)$

$$(y(x))'=e^x\cdot\sqrt[3]{x-5x^2}+e^x\cdot\frac{1}{3}\left(x-5x^2\right)^{\frac{-2}{3}}\cdot(1-10x)$$

3: $y(x)=2+\frac{x^2-1}{x}-\frac{x+1}{x^3}$

Két megoldási módszer is lehet:

§ A hányados deriválási szabályával

$$(y(x))'=0+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)'-\left(\frac{x+1}{x^3}\right)'$$

§ $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)'=\frac{(x^2-1)'x-(x^2-1)(x)'}{x^2}=\frac{2x\cdot x-(x^2-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}$

§ $\left(\frac{x+1}{x^3}\right)'=\frac{(x+1)'x^3-(x+1)(x^3)'}{(x^3)^2}=\frac{x^3-(x+1)3x^2}{x^6}=\frac{x^3-(3x^3+3x^2)}{x^6}=$

$=\frac{-2x^3-3x^2}{x^6}=-2\frac{1}{x^3}-3\frac{1}{x^4}$

$$(y(x))'=1+\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}+3\frac{1}{x^4}$$

§ Egyszerűsítéssel

$$y(x)=2+\frac{x^2-1}{x}-\frac{x+1}{x^3}=2+x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2+x-x^{-1}-x^{-2}-x^{-3}$$

$$(y(x))'=0+1-(x^{-1})-(x^{-2'})'-(x^{-3})'=1-(-1x^{-2})-(-2x^{-3})'-(-3x^{-4})=$$

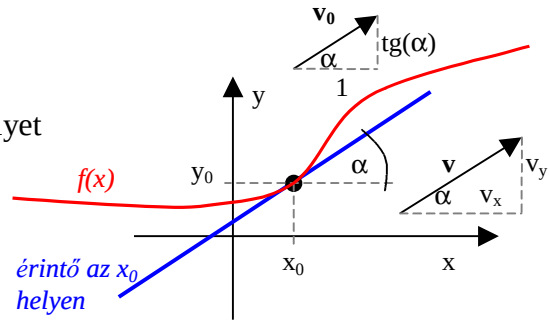
$$=1+\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x^3}+3\frac{1}{x^4}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

4: $y(x) = x \cdot \sin(x)$

$$(y(x))' = (x)' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

5: $y(x) = x^2$ $\qquad x_0 = 0$



Kérdés az erintő egyenlete az x_0-ban.
Az érintő egy egyenes a függvény síkjában, melyet megadhatunk egy pontjával (x_0, y_0) és az irányvektorával $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ illetve az ezzel párhuzamos $\mathrm{v}_0 = \left(1, \dfrac{v_y}{v_x}\right) = (1, \mathrm{tg}(a))$ vektorral,
melyben a $\mathrm{tg}(a) = m$ az egyenes meredeksége.
A görbe érintőjének meredekségét a deriváltfüggvény adja meg: $m = \mathrm{tg}(a) = y'(x_0)$

$y'(x) = 2x$

Az x_0 pontban a meredekség: $y'(x_0) = y'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

Az (x_0, y_0) pont az $y'(x)$-nek és az $y(x)$-nek közös pontja (*hiszen ezért ez az x_0-beli érintő*),
ebből $y_0 = y(x_0) = 0^2 = 0$

Az érintő egyenlete ezek szerint:
$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (1, m)$ vektoregyenlet, ebből paraméteresen:

$x = x_0 + t$
$y = y_0 + t \cdot m$ Behelyettesítve $x = 0 + t = t$
$y = 0 + t \cdot 0 = 0$ tehát x bármekkora is lehet, y mindig 0 marad, ez megegyezik az x tengely egyenletével.

6: $y(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad x_0 = 2$

Kérdés az erintő egyenlete az x_0-ban. Lásd mint előbb:
A görbe érintőjének meredekségét a deriváltfüggvény adja meg:

$y'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Az x_0 pontban a meredekség: $y'(2) = -\dfrac{1}{4}$

Az (x_0, y_0) pont az $y'(x)$-nek és az $y(x)$-nek közös pontja (*hiszen ezért ez az x_0-beli érintő*),
ebből $y_0 = y(x_0) = \dfrac{1}{2}$

Az érintő egyenlete ezek szerint:
$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (1, m)$ vektoregyenlet, ebből paraméteresen:

$x = x_0 + t$
$y = y_0 + t \cdot m$ Behelyettesítve $x = 0 + t = t$
$y = \dfrac{1}{2} + t \cdot \dfrac{1}{4}$ tehát $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}x$.

7: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$ Mivel a tört $\dfrac{0}{0}$ alakú, és mind a nevező, mind a számláló deriválható az $x = 0$ helyen, alkalmazzuk a L'Hospital szabályt:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$ a tört ismét $\frac{0}{0}$ alakú, és mind a nevező, mind a számláló deriválható az $x = 0$ helyen, alkalmazzuk a L'Hospital szabályt:

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\frac{1}{2}1=\frac{1}{2}$$

8: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cdot e^{\cos(x)}}{1-\sin(x)-\cos(x)}$ Mivel a tört $\frac{0}{0}$ alakú, vizsgáljuk meg a nevező és a számláló deriváltját! A **számláló**:

§ $\left(\sin(x)-x\cdot e^{\cos(x)}\right)'=\cos(x)-\left((x)'\cdot e^{\cos(x)}+x\cdot\left(e^{\cos(x)}\right)'\right)=\cos(x)-e^{\cos(x)}-x\cdot\left(e^{\cos(x)}\right)'$

$\left(e^{\cos(x)}\right)'=f'(x)$ Összetett függvény, a külső függvény az exponenciális függvény:

$f(g)=e^g$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $f'(g)=e^g$ g-t behelyettesítve $f'(g)=e^{\cos(x)}$

$g(x)=\cos(x)$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $g(x)=\sin(x)$

$\left(e^{\cos(x)}\right)'=e^{\cos(x)}\sin(x)$

§ $\left(\sin(x)-x\cdot e^{\cos(x)}\right)'=\cos(x)-e^{\cos(x)}-e^{\cos(x)}\sin(x)$

A **nevező**:

$(1-\sin(x)-\cos(x))'=-\cos(x)+\sin(x)=\sin(x)-\cos(x)$

A **L'Hospital szabály**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cdot e^{\cos(x)}}{1-\sin(x)-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{\cos(x)}-e^{\cos(x)}\sin(x)}{\sin(x)-\cos(x)}=\frac{1-e^1-e^1\cdot 0}{0-1}=e-1$$

9: $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ Végezzen teljes függvényvizsgálatot!

Értelmezési tartomány: Az *f(x)*-t alkotó függvények értelmezve vannak a teljes valós számhalmazon, ezért $\mathbf{D_f}$: $x\,\hat{I}$ **R**.

Szélsőértékkeresés:

$f'(x)=3x^2-x-2$ zérushelyei: $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot 3\cdot(-2)}}{6}\begin{cases}1\\-\frac{2}{3}\end{cases}$

$f'(x)=6x-1$ zérushelye: $x_3=\frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ inflexiós pont

Szélsőértékhelyek: $x=-\frac{2}{3}\Rightarrow f''\left(-\frac{2}{3}\right)=6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1<0\Rightarrow$ maximumhely

$x=1\Rightarrow f''(1)=6\cdot 1-1>0\Rightarrow$ minimumhely

Konvexitás: $x<\frac{1}{6}\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow$ konkáv

$x>\frac{1}{6}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow$ konvex.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

10: $f(x)=x^3+x^2-5x+6$ Végezzen teljes függvényvizsgálatot!

Értelmezési tartomány: Az *f(x)*-t alkotó függvények értelmezve vannak a teljes valós számhalmazon, ezért $\mathbf{D_f}$: $x\,\hat{I}\,\mathbf{R}$.

Szélsőértékkeresés:

$f'(x)=3x^2+2x-5$ zérushelyei: $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 3\cdot(-5)}}{6}\begin{cases}1\\ -\dfrac{5}{3}\end{cases}$

$f'(x)=6x+2$ zérushelye: $x_3=-\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ inflexiós pont

Szélsőértékhelyek: $x=-\dfrac{5}{3}\Rightarrow f''\left(-\dfrac{5}{3}\right)=6\cdot\left(-\dfrac{5}{3}\right)+2<0\Rightarrow$ maximumhely

$x=1\Rightarrow f''(1)=6\cdot 1+2>0\Rightarrow$ minimumhely

Konvexitás: $x<-\dfrac{1}{3}\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow$ konkáv

$x>-\dfrac{1}{3}\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow$ konvex.

11: $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$ $f'(x)=?$

Alakítsuk át:

$f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin(x)}=e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}\right)}=e^{\sin(x)\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$ felhasználva a logaritmus azonosságokat

(*Négyjegyű függvénytáblázat:* $\log_a(b^c)=c\cdot\log_a(b)$ *alapján*)

Összetett függvény:

$f(g)=e^g$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $f'(g)=e^g$

$g(x)=\sin(x)\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $g'(x)=\cos(x)\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin(x)\cdot\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'$

§ $\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'$ Szintén összetett függvény

§ $k(v)=\ln(v)$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $k'(v)=\dfrac{1}{v}$

§ $v(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$ $v'(x)=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

§ $\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'=\dfrac{1}{v}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=x\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x}$

$g'(x)=\cos(x)\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin(x)\cdot\dfrac{-1}{x}$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$f'(x)=e^{g}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)-\sin(x)\cdot\frac{1}{x}\right)=e^{\sin(x)\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)-\sin(x)\cdot\frac{1}{x}\right)$$

12: $f(x)=\left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $\qquad f'(x)=?$

Szintén alakítsuk át:

$$f(x)=e^{\ln\left(\left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))}$$

Összetett függvény:

$f(g)=e^{g}$ $\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\qquad$ $f'(g)=e^{g}$

$g(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos(x))$ $\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\qquad$ $g'(x)=-2\frac{1}{x^3}\cdot\ln(\cos(x))+\frac{1}{x^2}\cdot\left(\ln(\cos(x))\right)'$

- § $\left(\ln(\cos(x))\right)'$ Szintén összetett függvény
- § $k(v)=\ln(v)$ $\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\qquad$ $k'(v)=\frac{1}{v}$
- § $v(x)=\cos(x)$ $\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\qquad$ $v'(x)=-\sin(x)$
- § $\left(\ln(\cos(x))\right)'=\frac{1}{v}\cdot(-\sin(x))=\frac{1}{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))=-\operatorname{tg}(x)$

$$g'(x)=-2\frac{1}{x^3}\cdot\ln(\cos(x))-\frac{1}{x^2}\cdot\operatorname{tg}(x)$$

$$f'(x)=e^{g}\cdot\left(-2\frac{1}{x^3}\cdot\ln(\cos(x))-\frac{1}{x^2}\cdot\operatorname{tg}(x)\right)=e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))}\cdot\left(-2\frac{1}{x^3}\cdot\ln(\cos(x))-\frac{1}{x^2}\cdot\operatorname{tg}(x)\right)$$

13: $f(x)=\cos\left(x^{\frac{1}{x^2}}\right)$ $\qquad f'(x)=?$

Összetett függvény:

$f(g)=\cos(g)$ $\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\ f'(g)=-\sin(g)$

$g(x)=x^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x^2}}\right)}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(x)}\Rightarrow g(v)=e^{v}$ $\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\ g'(v)=e^{v}$

lásd logaritmus azonosságok

$v(x)=\frac{1}{x^2}\ln(x)$ $\qquad\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}v'(x)&=\\&=\left(\frac{1}{x^2}\right)'\cdot\ln(x)+\frac{1}{x^2}\cdot\left(\ln(x)\right)'=\\&=-2\frac{1}{x^3}\cdot\ln(x)+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}=\\&=\frac{1}{x^3}\left(1-2\cdot\ln(x)\right)\end{aligned}}$$

$$f'(x)=-\sin(g)\cdot e^{v}\cdot\frac{1}{x^3}\left(1-2\ln(x)\right)=-\sin\left(e^{v}\right)\cdot e^{v}\cdot\frac{1}{x^3}\left(1-2\ln(x)\right)=$$

$$=-\sin\left(e^{\frac{1}{x^2}\ln(x)}\right)\cdot e^{\frac{1}{x^2}\ln(x)}\cdot\frac{1}{x^3}\left(1-2\ln(x)\right)=-\sin\left(x^{\frac{1}{x^2}}\right)\cdot x^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^3}\left(1-2\ln(x)\right)$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com