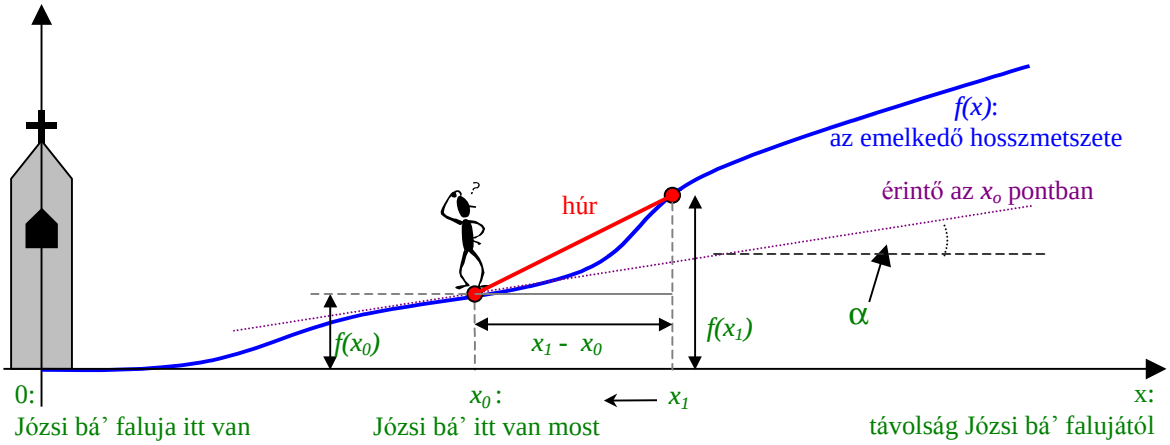
Derivál

Józsi bá' elindul a szomszéd faluba, mely az ő falujától pontosan északra van. Az út egy nagy emelkedőn vezet át, melyen az öregnek igen csak kell kapaszkodnia. Hogy egy adott helyen menyire, az attól függ ott mennyire meredek a domb; azaz az adott pontban a dombhoz húzott érintőnek mekkora a meredeksége. Jobban látjuk ezt, ha az emelkedő hosszmetszetét megnézzük:



Az érintő meredeksége: $m_e = \mathrm{tg}(a)$.

Mivel nem jellemző Józsi bá'-ra hogy szögmérőt is hord magánál, csak közelíteni tudja a meredekséget. Pl. ha megnézi, hogy most milyen magasan van és előtte mondjuk 5m-rel (x_1 pontban) milyen magas a domb, akkor ki tud számítani egy közelítő átlagot a meredekségre:

$$m \approx \frac{\text{magasságváltozás 5 méter alatt}}{5\,\text{méter}}$$

Az *f(x)* függvényen ez úgy látható, hogy az x_1 ponthoz tartozó madasságot összekötjük az x_0-hoz tartozó magassággal. Kapunk egy húrt melynek a meredeksége:

$$m_h = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Látható, hogy ez elég durva közelítés, hiszen lényegesen különbözik az érintő és a húr meredeksége. A közelítés finomítható, ha x_1-t x_0-hoz egyre közelebb vesszük fel, azaz közelítjük x_0-hoz. Ennek a közelítésnek Józsi bá' esetében egy ésszerű korlátja a cipő mérete (hiszen oly mindegy mennyit változik a talpa alatt meredekség, az átlagon nem nagyon változtat), a matematikában azomban a közelítést korlát nélkül meg tudjuk tenni határértékképzéssel:

$$m_e = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

(*azaz ismét függvényhatárértéket kell számítani*)

Mivel $x_1 = x_0 + Dx$, akkor $x_1 - x_0 = Dx$, és ha $x_1 \to x_0$, akkor $Dx \to 0$. Így a meredekség:

$$m_e = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ez az ún. **differenciálhányados**. Ha létezik ez a határérték, akkor a differenciálhányados visszaadja a függvény meredekségét az x_0 helyen. Ha egy függvényre az értelmezési tartomány egy intervallumában minden pontban kiszámítjuk a differenciálhányadost, ami az intervallum minden pontjában létezik, akkor megkapjuk a függvény **deriváltfüggvény**ét az adott intervallumban. Tehát a deriváltfüggvény a differenciálhányadosból képzett függvény, a differenciálhányados pedig a deriváltfüggvény egy bizonyos helyen (pl. x_0) felvett értéke. A deriváltfüggvény jele(i):

Az *f(x)* deriváltfüggvényét a következőkkel jelölhetjük:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

Pl. sin(x) deriváltfüggvénye:

$\frac{d\sin(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$ Felhasználjuk az addíciós tételt szögek összegének szinuszára (*középisk. Lásd pl. Négyjegyű Függvénytáblázatok*):

$\sin(a+b) = \sin(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\sin(b)$

$$\frac{d\sin(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(\Delta x) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

Kiemelhetők azok a tagok, melyek nem *Dx*-től függenek:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(\Delta x) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cdot(\cos(\Delta x) - 1) + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x} = \cos(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = \cos(x)$$

Mivel $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

A fontosabb fügvények deriváltfüggvényei már meg vannak határozva, nekünk csak fel kell használnunk őket:

$$(C)' = 0$$
$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(ar\,\mathrm{ctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(arc\,\mathrm{ctg})' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$$
$$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$$
$$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$
$$(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Az általában előforduló (pl. GDF ZH) feladatokban a fenti függvényekből összerakott függvényeket kell deriválni. Az így összerakott függvények deriválásához (*bizonyítás nélkül*) adott néhány szabály:

Deriválási szabályok

– Ha az *y=f(x)* és *y=g(x)* függvények deriválhatók, akkor az *f(x)+g(x)* függvény is deriválható és

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

(Ezt a szabályt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy deriválható függvények összege tagonként deriválható.)

– Ha az *y=f(x)* és *y=g(x)* függvények deriválhatók, akkor az *f(x)-g(x)* is deriválható és

$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$$

(A különbséget is lehet tagonként deriválni.)

– Ha az *y=f(x)* deriválható és *C* egy tetszőleges valós szám, akkor a $C\cdot f(x)$ függvény is deriválható és

$$(C\cdot f(x))'=C\cdot f'(x)$$

– Ha *y=f(x)* és *y=g(x)* függvények deriválhatók, akkor az $f(x)\cdot g(x)$ is deriválható és

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

– Ha az *y=f(x)* és *y=g(x)* függvények deriválhatók és $g(x)\neq 0$ teljesül az értelmezési tartomány bármely *x* elemére, akkor az $\frac{f(x)}{g(x)}$ függvény is deriválható és

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

– Ha az *f(g)*, g*(v)* és *v(x)* függvények deriválhatók, akkor az *f(g(v(x)))* összetett függvény is deriválható és

$$f'(g(v(x)))=f'(g)\cdot g'(v)\cdot v'(x) \qquad (\textit{Láncszabály})$$

– Ha az *y=f(x)* függvény deriválható és $f^{-1}(x)$ jelöli az inverz függvényét, akkor az inverz függvény is derviálható lesz és

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Példák az alkalmazásra:

1:

$$(\sin(x)+\mathrm{tg}(x))' = (\sin(x))' + (\mathrm{tg}(x))' = \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}$$

2:

$$(\sin(x)\cdot \mathrm{tg}(x))' = (\sin(x))'\cdot \mathrm{tg}(x) + \sin(x)\cdot(\mathrm{tg}(x))' = \cos(x)\cdot \mathrm{tg}(x) + \sin(x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} =$$

$$= \sin(x) + \frac{\mathrm{tg}(x)}{\cos(x)}$$

3:

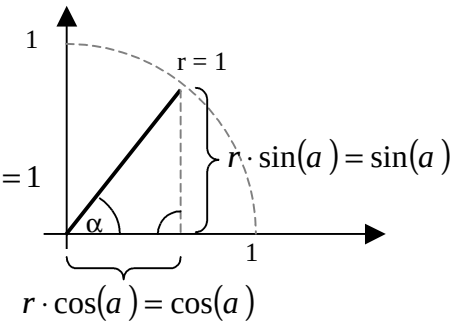
$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{(\sin(x))'\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} =$$

$$= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$$

illetve kihasználva, hogy $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ (*ábra*)

$$(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$r^2 = \sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$



4:

$\sin(\cos(\ln(x))) = f(x)$ $\qquad f'(x) = ?$

Látható hogy az f függvény ugyan x-től függ, de csak közvetetten. Az f függvény közvetlen változója a $\cos(\ln(x)) = g(x)$ függvény. A g függvény közvetlen változója a $\ln(x) = v(x)$ függvény, aminek x már közvetlen változója, és ez utóbbit le tudjuk deriválni x szerint a láncszabály nélkül. A függvény tehát így néz ki: $f(x) = f(g(v(x)))$

A láncszabály szerint az *f, g és v* függvényt a saját közvetlen változója szerint kell deriválni, majd összeszorozni.

a. $f(g) = \sin(g) \Rightarrow f'(g) = \cos(g)$

b. $g(v) = \cos(v) \Rightarrow g'(v) = -\sin(v)$

c. $v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

A g-t behelyettesítve a.-ba $f'(g) = \cos(\cos(v))$ majd v-t is $f'(g) = \cos(\cos(\ln(x)))$

A v-t behelyettesítve b.-be $g'(v) = -\sin(\ln(x))$

Ezekből:

$$f'(x) = -\cos(\cos(\ln(x)))\cdot\sin(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

5:

$f(x)=\mathrm{tg}^2(\ln(x))$ $\qquad f'(x)=?$

Első látásra ez csak két függvényből van összetéve, valójában azomban háromból. *Tipikus hiba, hogy nem vesszük észre, hogy a hatványozás is függvény!* Ha átírjuk:

$f(x)=(\mathrm{tg}(\ln(x)))^2 = f(g(v(x)))$ Kifejtve, mint az előbb:

a. $f(g)=g^2 \Rightarrow f'(g)=2g$

b. $g(v)=\mathrm{tg}(v)\Rightarrow g'(v)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

c. $v(x)=\ln(x)\Rightarrow v'(x)=\dfrac{1}{x}$

A g-t behelyettesítve a.-ba $f'(g)=2\cdot\mathrm{tg}(v)$ majd v-t is $f'(g)=2\cdot\mathrm{tg}(\ln(x))$

A v-t behelyettesítve b.-be $g'(v)=\dfrac{1}{\cos^2(\ln(x))}$

Ezekből:

$$f'(x)=2\cdot\mathrm{tg}(\ln(x))\cdot\frac{1}{\cos^2(\ln(x))}\cdot\frac{1}{x}$$

6:

$f'(x)=(\sin(4x))'=?$ $\qquad$ Ez kétszeresen összetett:

a. $f(g)=\sin(g)\Rightarrow f'(g)=\cos(g)$

b. $g(x)=4x\Rightarrow g'(x)=4$

A g-t behelyettesítve a.-ba $f'(g)=\cos(4x)$

Ebből:

$f'(x)=4\cos(4x)$

7:

$f'(x)=(x^7\cdot\sin(3x^5))'=?$ $\qquad$ Először szorzásszabály:

$$(x^7\cdot\sin(3x^5))'=(x^7)'\cdot\sin(3x^5)+x^7\cdot(\sin(3x^5))'=7x^6\cdot\sin(3x^5)+x^7\cdot(\sin(3x^5))'$$

Majd a láncszabály:

$\sin(3x^5)=g(v(x))$

a. $g(v)=\sin(g)\Rightarrow g'(v)=\cos(g)$ $\qquad$ b. $v(x)=3\cdot x^5\Rightarrow v'(x)=3\cdot 5x^4$

A g-t behelyettesítve a.-ba $g'(v)=\cos(3x^5)$ $\qquad$ Ebből:

$(\sin(3x^5))'=\cos(3x^5)\cdot 15x^4$ $\qquad$ Behelyettesítve:

$$(x^7\cdot\sin(3x^5))'=7x^6\cdot\sin(3x^5)+x^7\cdot\cos(3x^5)\cdot 15x^4=7x^6\cdot\sin(3x^5)+15x^{11}\cdot\cos(3x^5)$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

A deriválás alkalmazása a függvény analízisére

Néhány fogalom:

§ Az *f(x)* függvény az (a, b) intervallumban **szigorúan monoton növő**, ha az intervallum két tetszőleges pontjában melyre $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.

§ Az *f(x)* függvény az (a, b) intervallumban **szigorúan monoton csökkenő**, ha az intervallum két tetszőleges pontjában melyre $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

§ Az *f(x)* függvény az (a, b) intervallumban **monoton növő**, ha az intervallum két tetszőleges pontjában melyre $x_1 < x_2$, $f(x_1) \leq f(x_2)$. (= *Nem csökkenő*)

§ Az *f(x)* függvény az (a, b) intervallumban **monoton csökkenő**, ha az intervallum két tetszőleges pontjában melyre $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$. (= *Nem növő*)

§ Az *f(x)* függvénynek az x_0 helyen **maximum**a van, ha van olyan környezete, melyben a függvény értékei csak kisebbek lehtenek $f(x_0)$-nál. Tehát előtte tetszőleges nagyságú (a, x_0) intervallumban a függvény szigorúan monoton nő; de utána tetszőleges nagyságú (x_0, b) intervallumban szigorúan monoton csökkenő

§ Az *f(x)* függvénynek az x_0 helyen **minimum**a van, ha van olyan környezete, melyben a függvény értékei csak nagyobbak lehetnek $f(x_0)$-nál. Tehát előtte tetszőleges nagyságú (a, x_0) intervallumban a függvény szigorúan monoton csökkenő; de utána tetszőleges nagyságú (x_0, b) intervallumban szigorúan monoton növő.

Kanyarodjunk vissza még egy kicst Józsi bá'-hoz. Azt láttuk, hogy a dombmagasság deriválfüggvénye tulajdonképpen a dombmeredekség függvénye. Ez azt jelenti:

§ Ahol a deriváltfüggvény pozitív, ott Józsi bá' előtt emelkedő van, minél nagyobb a derivált, annál meredekebben megy felfelé.

§ Ahol a deriváltfüggvény negatív, ott Józsi bá' előtt lejtő van, minél kisebb a derivált, annál meredekebben lejt lefelé.

§ Ahol a deriváltfüggvény 0, ott a magasság nem változik, Józsi bá' egy lapos szakaszon megy keresztül.

§ Amikor Józsi bá' eléri a domb csúcsát (vagy csak a domb egy kis buckájának a „helyi" csúcsát), akkor a csúcson a meredekség 0 hiszen ott megy át emelkedőből lejtőbe, a meredekség pozitívból negatívba.

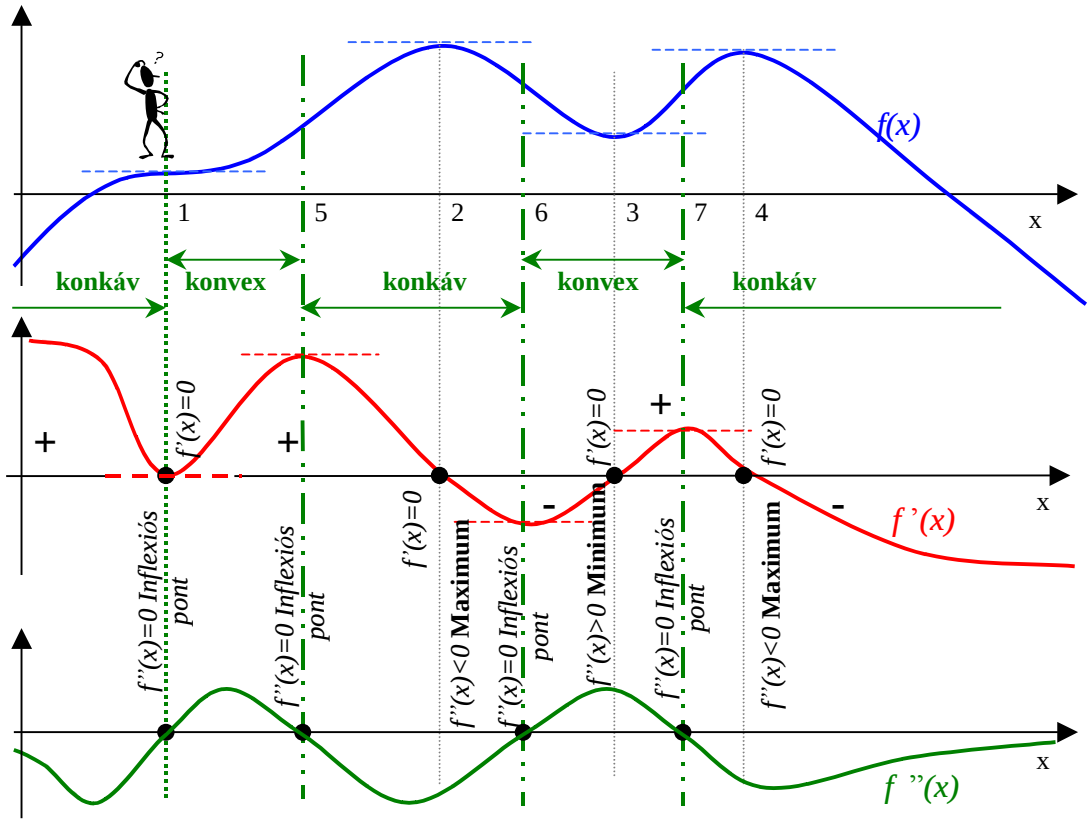
A fenti gondolatmenet alapján:

§ Az *f(x)* függvény az (a, b) intervallumban szigorúan monoton növő, ha ott a deriváltja pozitív.

§ Az *f(x)* függvény az (a, b) intervallumban szigorúan monoton csökkenő, ha ott a deriváltja negatív.

§ Szélsőértéknél a derivált 0 de ez fordítva nem mindig igaz, nézzük meg az ábránt! Be lettek jelölve a 0 meredekségű helyek: az összes szélsőértékhelyek, valamint egy kakukktojás az 1 helyen. Ha Józsi bá' épp ott tart, a meredekség 0 értéke ellenére csak egy lapos részre ért, és nem az egyik csúcsra. A derivált előjelét a lejtő vagy emelkedő jellegből alakját a meredekség mértéke alaján saccoltuk meg. A kakukktojást az alapján is felfedezhetjük, hogy a derivált az 1 helyen nem vált előjelet, (*növekvőből növekvő marad*); míg az összes szélsőrtékhelyen előjelet vált (*növekvőből csökkenő, vagy fordítva*). Egy másik módszer a második derivált $f''(x)$ (*a deriváltfüggvényt ismét deriváljuk*) megvizsgálása alapján. Ennek pozitív értéke *f(x)* **konvex** (*felfelé hajló*) jellegére, negatív értéke *f(x)* **konkáv** (*felfelé hajló*) jellegére utal. Az $f''(x) = 0$-hoz tartozó helyet hívjuk **inflexiós pont**nak (*a függvény itt vált konkávból konvexbe, vagy fordítva*). Az inflexiós pont nem lehet szélsőérték (*mert pl maximumnál a függvény lefelé hajló jellegű*), és a második derivált 0-helyei között ott van az 1 hely is.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com



§ Maximumnál $f'(x) = 0$, és $f''(x) < 0$.

§ Minimumnál $f'(x) = 0$, és $f''(x) > 0$.

§ A monotonitási szakaszokat (*intervallumok, ahol a függvény szigorúan monoton illetve monoton nő vagy csökken*) a szélsőértékhelyek határolják. (*A példánkban pl. f(x) a (-¥,2) intervallumban monoton nő [az 1 helyen nem szigorúan monoton], de pl. a (3,4) intervallumban szig. mon. nő*)

§ A konvexitási szakaszokat (*intervallumok, ahol a függvény konkáv vagy konvex*) az inflexiós pontok határolják. (*A példánkban pl. f(x) a (-¥, 1) intervallumban konkáv , de pl. a (6,7) konvex*)

Táblázatosan:

$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$
Minimum	$f'(x_0) = \mathbf{0}$	$\mathbf{0} < f''(x_0)$
Maximum	$f'(x_0) = \mathbf{0}$	$f''(x_0) < \mathbf{0}$
Inflexiós pont	$f'(x_0) = \mathbf{0}$	$f''(x_0)=\mathbf{0}$
Szigorúan monoton nő	$\mathbf{0} < f'(x_0)$	-
Szigorúan monoton csökken	$f'(x_0) < \mathbf{0}$	-
Konstans	$f'(x_0) = \mathbf{0}$	$f''(x_0)=\mathbf{0}$
Konkáv (*lefelé hajló*)	-	$f''(x_0) < \mathbf{0}$
Konvex (*felfelé hajló*)	-	$\mathbf{0} < f''(x_0)$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Pl:

$f(x)=2x^3-5x^2-4x+10$ szélsőértékeinek és monotonitási szakaszainak keresése.

Állítsuk elő a deriváltakat:

$f'(x)=6x^2-10x-4$

A nullahelyei: $x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-4\cdot 6\cdot(-4)}}{12}=\begin{cases}2\\ -\dfrac{1}{3}\end{cases}$

$f''(x)=12x-10$

A nullahelye: $x=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$ ez egy inflexiós pont.

$f''(2)=12\cdot 2-10=14>0\Rightarrow$ az $x=2$ –nél minimumhely van.

$f''\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)-10=-14\Rightarrow$ az $x=-\dfrac{1}{3}$ –nál maximumhely van.

A $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$ intervallumban *f(x)* szigorúan monmonoton nő, a $\left(-\dfrac{1}{3},2\right)$ intervallumon szigorúan monoton csökken, a (2, ∞) intervallumon szigorúan monoton nő.

$f''\left(x<\dfrac{5}{6}\right)=pl._\ f''(0)=-10\Rightarrow$ A $\left(-\infty,\dfrac{5}{6}\right)$ intervallumban *f(x)* konkáv.

$f''\left(x>\dfrac{5}{6}\right)=pl._\ f''(1)=12-10=2\Rightarrow\left(\dfrac{5}{6},\infty\right)$ intervallumon *f(x)* konvex.

L'Hospital szabály

Ha $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ határértéket kell kiszámítani, és $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, akkor ha *f(x)* és *g(x)* az x_0 helyen deriválható, akkor:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ugyanez igaz abban az esetben is, ha $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, hiszen

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\to\infty}{g(x)\to\infty}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{f(x)}\to 0}{\dfrac{1}{g(x)}\to 0}$$

Akkor is ha $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ határértéket kell kiszámítani, és $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, hiszen $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\to 0}{\dfrac{1}{g(x)}\to 0}$

Pl.:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ mivel mind a nevező, mind a számláló 0-hoz tart: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)}$ mivel mind a nevező, mind a számláló 0-hoz tart: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos(x)}=1$

MacLaurin polinom

Vannak olyan függvények, melyek értékét csak bizonyos helyeken tudjunk megadni a függvény azonosságai alapján. Ilyen pl az e^x a *sin(x)* stb. A többi helyen csak közelíteni tudjuk, erre jó például a MacLaurin polinom is.

A MacLaurin polinom tulajdonképpen egy olyan polinom *x*-re ($p(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x^1+a_0$) melynek eggyütthatói speciálisan vannak megválasztva, így az tetszőleges függvényt közelíthet a 0 környezetében.

Ha az *f(x)* függvény a *0* helyen legalább *n*-szer differenciálható, akkor a
$P_n(x)=f(o)+\frac{f'(o)}{1!}x+\frac{f''(o)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}}{n!}x^n$ polinomot az *f(x)* függvény *n*-edfokú Mac' Laurin polinomjának nevezzük.
A közelítés annál pontosabb illetve egy bizonyos pontosság annál szélesebb intervallumban igaz, minél több tagot veszünk be a polinomba.
Pl. $f(x)=e^x$ akárhányszor deriváljuk *f(x)*-t, mindig e^x-t kapunk $e^0=1$. Így e^x-t a 0 hely közelében közelítő polinom:

$$P_n(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n$$

Taylor polinom

A MacLaurin polinom „továbbfejlesztése”, egy olyan polinom *(x-x₀)*-ra ($p(x)=a_k(x-x_0)^k+a_{k-1}(x-x_0)^{k-1}+...+a_1(x-x_0)^1+a_0$) melynek eggyütthatói speciálisan vannak megválasztva, így az tetszőleges függvényt közelíthet az x_0 hely környezetében. Így nem csak a 0 hely környezetében tudunk pontosan közelíteni, hanem bármely pont környezetében, ahol ismerjük a függvény és deriváltjainak értékét.
Ha az *f(x)* függvény az a helyen legalább *n*-szer differenciálható, akkor a
$t_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ polinomot az *f(x)* függvény x_0 ponthoz tartozó *n*-edfokú Taylor-polinomjának nevezzük. A közelítés annál pontosabb illetve egy bizonyos pontosság annál szélesebb intervallumban igaz, minél több tagot veszünk be a polinomba.
Pl. $f(x)=\sin(x)$ $\quad(\sin(x))'=\cos(x)$ $\quad(\cos(x))'=-\sin(x)$
Ez alapján látható, hogy minden negyedik derivált *sin(x)*, az utána következő *cos(x)*, az utána következő *-sin(x)*, az utána következő *-cos(x)*.
Legyen x_0 például $\frac{p}{2}$. $\sin\left(\frac{p}{2}\right)=1$, $\cos\left(\frac{p}{2}\right)=0$, $-\sin\left(\frac{p}{2}\right)=-1$, $-\cos\left(\frac{p}{2}\right)=0$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Így a *sin*(*x*)-t közelítő polinom a $\frac{p}{2}$ hely közelében:

$$t_n(x) = 1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{p}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{p}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x - \frac{p}{2})^6. + \frac{1}{8!}(x - \frac{p}{2})^8 - \ldots$$

Egy példa a függvény meredekségének keresésével.

Adott az $y(x) = 3x^2 - 4x + 1$ egyenlettel megadott görbe. Számítsuk ki a hozzá húzható érintő meredekségét az *x = 3* helyen, és adjuk meg az érintési pont kordinátáit!

Az *x = 3* helyen az érintő meredekségét definíció szerint megadja a deriváltfüggvény értéke az *x = 3* helyen.:

$$y'(x) = 6x - 4 \Rightarrow y'(3) = 6 \cdot 3 - 4 = 14$$

Az érintési pont az *y(x)* függvénynek is pontja; az *x* koordináta az *x = 3*, az *y* koordináta így $y(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = 16$, az érintési pont koordinátája (3, 16).

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com