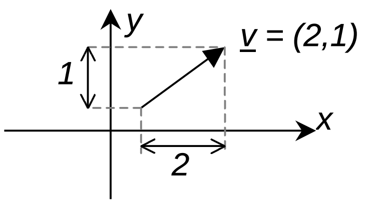
Vektorok

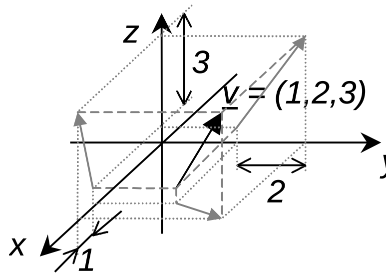
Vektor: egy összetartozó szám n-es. (1,2), (1,2,3), (1,2,3,4,…n)

A vektorok betűjelét <u>aláhúzással</u>, vagy **kiemeléssel** különböztetjük meg a számokétól.

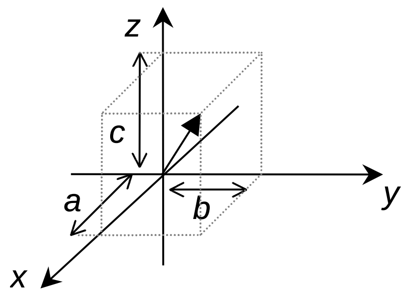
2 és 3 elemü (2 és 3 dimenzios) vektorok értelmezése eukledeszi geometriaban:

Eukledeszi geometriáról beszélünk, ha az alap koordinátarendszerünk derékszögű és minden irányban azonos léptékű. Ekkor egy vektor két pontot összekötő irányított szakasz, melynek első komponense az első foirányban, a második komponense a második főirányban,…stb. a kezdőponttól a végpont felé történő „elmozdulás” nagyságát jelöli.

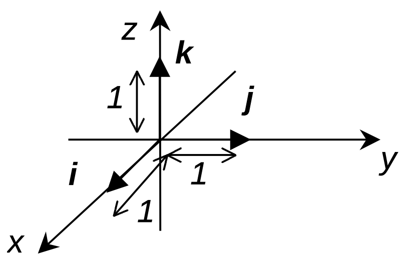




Egy vektor adatai semmilyen információt nem szolgáltatnak a kezdőpontjáról. Ez érthető is, mivel a vektor mindig egy relatív „elmozdulást” jelent. Ezért ha a vektrort párhuzamosan eltoljuk, az magát a vektort nem változtatja meg, így egy vektor párhuzamos eltolásokkal a tér (sík) bármely pontján kezdődhet. Ebből következik, ha egy vektort pontos térbeli helyzetbe akarunk állítani, meg kell adni a kezdőpont helyét (koordinátáit) is.
Ha az (a,b,c) vektor kezdőpontja az origo, akkor a végpontja az (a,b,c) koordinátájú pont helyére mutat. Ezért azokat a vektorokat, amelyek kezdőpontja az origó, helyvektornak hívjuk.



Egy adott főirány egységvektorának hívjuk azt a vektort, amelyik az adott irányban egységnyi „elmozdulást”, a többiben 0-t ír elö. Ezeknek a vektoroknak külön nevük is van, az x irányú egységvektor **i** , az y irányú **j** , a z irányú a **k**.

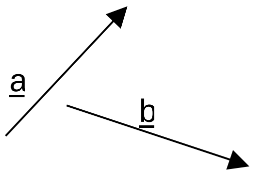


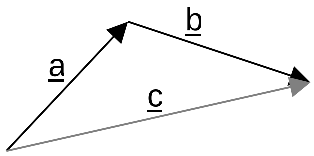
PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

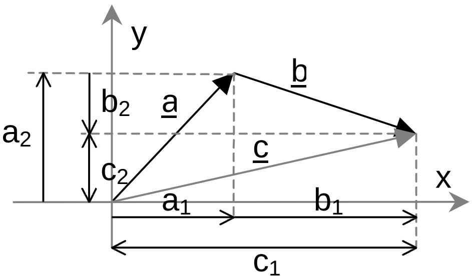
Műveletek vektorokkal

Vektorok összegzése:

Az $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ összegvektort úgy kapjuk meg, hogy az $\underline{a}$ vektor végpontjához párhuzamos eltolásokkal illesztjük a $\underline{b}$ vektor kezdőpontját, ekkor a $\underline{c}$ vektor az $\underline{a}$ vektor kezdőpontjából a $\underline{b}$ vektor végpontjába mutat.







Ha a vektorok koordinátáikkal adottak, akkor az összegvektor koordinátáit az $\underline{a}$ $\underline{b}$ vektorok megfelelő koordinátáinak összegével kapjuk.

Pl:

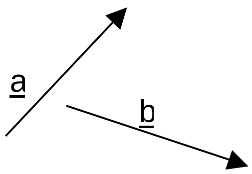
$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$ $\qquad$ $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots b_n)$

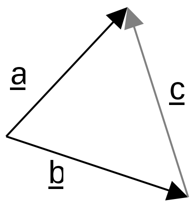
$\underline{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots c_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots a_n + b_n)$

A fenti ábrán n = 2-re látható példa (b_2 itt éppen negatív!).

Vektorok különbsége:

Az $\underline{a} - \underline{b} = \underline{c}$ különbségvektort úgy kapjuk meg, ha átrendezzük $\underline{a} = \underline{b} + \underline{c}$ összegre, ekkor, az előző módszer szerint, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoroknak azonos a kezdőpontja, a $\underline{c}$ vektor így a $\underline{b}$ vektor végpontjából az $\underline{a}$ vektor végpontjába fog mutatni:





Ha a vektorok koordinátáikkal adottak, akkor az különbségvektor koordinátáit az $\underline{a}$ $\underline{b}$ vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével kapjuk.

Pl:

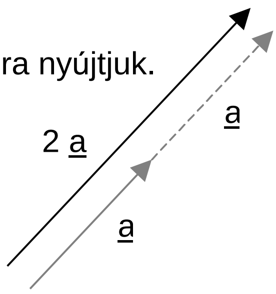
$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots a_n)$ $\qquad$ $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots b_n)$

$\underline{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots c_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots a_n - b_n)$

Vektorok szorzata konstanssal:

A $\underline{b} = \lambda\, \underline{a}$ szorzatvektort úgy képezzük, hogy az $\underline{a}$ vektort λ-szorosára nyújtjuk.

Pl.: $\lambda = 2$



PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Vektorok abszolút értéke:

A vektor abszolút értékén annak hosszúságát értjük. Kiszámítása a koordinátákból a Pitagórasz tétel segítségével:

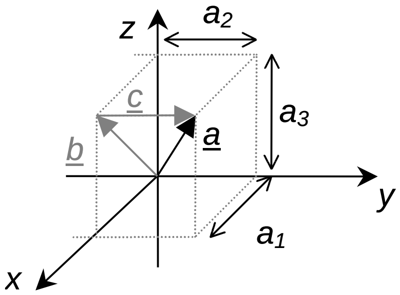
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

Pl.: n = 3

Esetünkben $\underline{a} = \underline{b} + \underline{c}$, és $\underline{b}$ merőleges $\underline{c}$-re.

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_3^2} \qquad |\mathbf{c}| = a_2$$

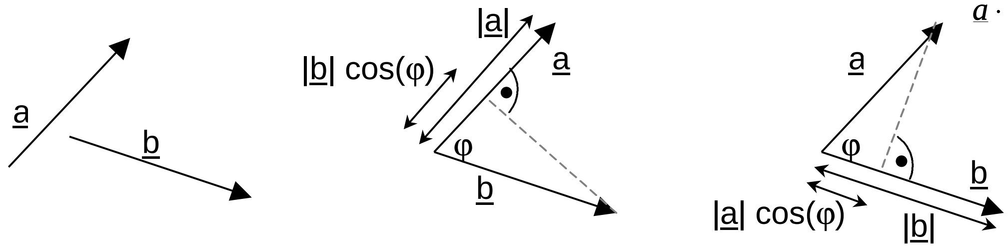
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2} = \sqrt{\left(a_1^2 + a_3^2\right) + a_2^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Vektorok skaláris szorzata:

Az $\underline{a}$ $\underline{b}$ skaláris szorzat egy szám, amely az egyik vektor hosszúságának és a másik vektor elsőre vetített hosszúságának szorzata (az eredmény szempontjából mindegy, hogy $\underline{a}$-t vagy $\underline{b}$-t tekintem „egyik” vektornak, $\underline{a}$ $\underline{b}$ = $\underline{b}$ $\underline{a}$):

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos j$$



Ha a vektorok koordinátáikkal adottak, akkor a skaláris szorzat az $\underline{a}$ $\underline{b}$ vektorok azonos koordinátáinak szorzatának összege.

Pl:

$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)$ $\qquad$ $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots b_n)$

$\underline{a}\ \underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots a_nb_n$.

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ hosszúsága nem 0, akkor az $\underline{a}$ $\underline{b}$ skaláris szorzat akkor és csak akkor 0, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ merőlegesek egymásra.

A skaláris szorzat két definíciója segítségével ki lehet számítani két vektor bezárt szögét:

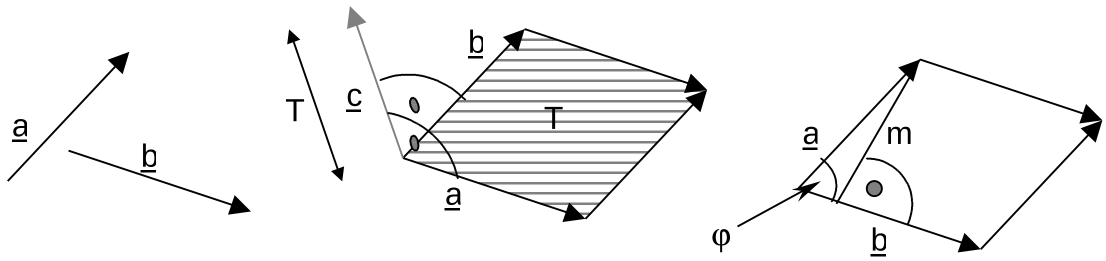
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos j = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$$

$$\cos j = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Vektorok vektoriális szorzata

Az a x b = c vektoriális szorzat egy olyan vektor, amelyik mind a-ra mind b-re merőleges, a-val és b-vel jobbsodrású rendszert alkot (jobbkézszabály), és hosszúsága megegyezik a két vektor által kifeszített paralelogramma területével.



A paralelograma területképletéből:

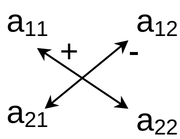
$$|\mathbf{c}| = T = |\mathbf{b}| \cdot m = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \sin j$$

Ha a vektorok koordinátáikkal adottak, akkor a vektoriális szorzatvektor koordinátái a következő módon állíthatók elő:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Értelmezése (bővebben lsd Determinánsok (Lineáris algebra)):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$ azaz keresztbe szorzunk, és összegzünk az ábra szerinti előjelekkel.



$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kiválasztjuk a sor második elemét, ezt most –1-el beszorozzuk , letakarjuk az elemet tartalmazó sort és oszlopot, a fennmaradó 2x2-es részmátrix determinását megszorozzuk az elemmel:

$$\begin{vmatrix} & \mathbf{j} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -\mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Kiválasztjuk a sor harmadik elemét, letakarjuk az elemet tartalmazó sort és oszlopot, a fennmaradó 2x2-es részmátrix determinását megszorozzuk az elemmel:

$$\begin{vmatrix} & & \mathbf{k} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ebből:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \cdot (a_2 b_3 - b_2 a_3) - \mathbf{j} \cdot (a_1 b_3 - b_1 a_3) + \mathbf{k} \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

Ha a és b hosszúsága nem 0, akkor az a x b vektoriális szorzat akkor és csak akkor 0, ha a és b párhuzamosok egymással.

A skaláris szorzat két definíciója segítségével ki lehet számítani két vektor bezárt szögét:

$$\sin j = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{\sqrt{(a_2 b_3 - b_2 a_3)^2 + (a_1 b_3 - b_1 a_3)^2 + (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

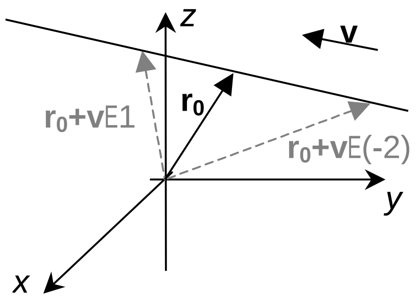
Egyenes egyenlete

Az egyenes egyenlete egy a koordinátákkal, vagy a helyvektorokkal felírt egyenlet, melynek megoldáspontjainak koordinátái az egyenesre esnek. Azaz az adott egyenes egyenletét az adott egyenes, de csakis adott egyenes pontjai elégítik ki (behelyettesítve azonosságot adnak).

Egyenes paraméteres egyenlete

Az egyenes paraméteres egyenletéhez meg kell adnunk az egyenes egy ismert pontjának helyvektorát ($\mathbf{r_0}$), valamint egy az egyenessel párhuzamos un. irányvektort ($\mathbf{v}$), továbbá felveszünk egy paramétert (t), mely a (-∞,∞) intervallumban vehet fel értéket, és minden egyes kiválasztott értékéhez az egyenes egy pontjának helyvektora tartozik ($\mathbf{r}$).

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v} \cdot t$$



Fizika: egyenes vonalú egyenletes mozgás, t=0-ban a helyem $\mathbf{r_0}$*, a sebességem* $|\mathbf{v}|$ *nagyságú és* $\mathbf{v}$ *irányú, akkor bármely t időpontban a helyem a* $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v} \cdot t$ *egyenlettel számítható ki.*

Koordinátákkal felírva:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + v_x \cdot t \\ y &= y_0 + v_y \cdot t \\ z &= z_0 + v_z \cdot t \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{v_x} \\ t &= \frac{y - y_0}{v_y} \\ t &= \frac{z - z_0}{v_z} \end{aligned}$$

Ebből kapjuk az egyenes egyenletét:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

A tér egy pontja akkor lehet az egyenes pontja, ha a koordinátáit behelyettesítve az egyenes egyenletébe, azonosságokat kapunk.

Példák:

Adott két egyenes $e: x - 4 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$ azaz $\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$

$f: 3 - x = \frac{y-1}{2} = z + 2$ azaz $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$

Ebből 'e'-re: $\mathbf{r_{0e}}$ = (4,3,1) $\mathbf{v_e}$ = (1,2,3)

'f'-re: $\mathbf{r_{0f}}$ = (3,1,-2) $\mathbf{v_f}$ = (-1,2,1)

Van e metszéspontjuk, és ha van hol?

A metszéspont kordinátáinak mind a két egyenetet ki kell elégítenie.

Az e egyenesből: $x - 4 = \frac{y-3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-3}{2} + 4$

Az f egyenesből: $3 - x = \frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3 - \left(\frac{y-3}{2} + 4\right) = \frac{y-1}{2}$

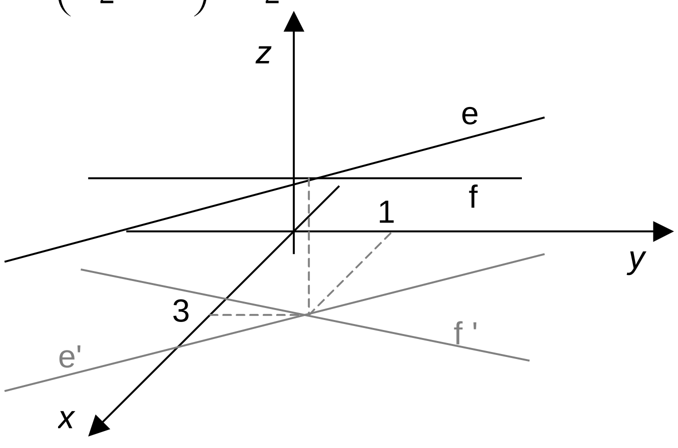
$$-1 - \frac{y-3}{2} = \frac{y-1}{2} \qquad \Big| + \frac{y-3}{2}$$

$$-1 = \frac{y-1}{2} + \frac{y-3}{2} = \frac{2y-4}{2} = y - 2$$

$$y = 1$$

$$x - 4 = \frac{y-3}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$x = 3$$



Ez a két egyenes xy síkvetületének (e', f ') metszéspontja. A két egyenesnek akkor van metszéspontja, ha az xy koordinátákat behelyettesítve mindkét egyenesnél azonos z értéket kapunk.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$e: x-4=\frac{z-1}{3} \quad \Rightarrow \quad 3-4=\frac{z-1}{3} \Rightarrow (-1)\cdot 3 = z-1 \Rightarrow z=-2$$

$$f: 3-x=z+2 \quad \Rightarrow \quad 3-3=z+2 \Rightarrow z=-2$$

A két egyenes a (3,1,-2) pontban metszi egymást

Adott két egyenes $e: \frac{x-5}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{4}$

$f: x-1=\frac{y-1}{2}=z+2$

Ebből ’e’-re: $\mathbf{r_{0e}}$ = (5,2,0) $\mathbf{v_e}$ = (3,2,4)
’f’-re: $\mathbf{r_{0f}}$ = (1,1,-2) $\mathbf{v_f}$ = (1,2,1)
Van e metszéspontjuk, és ha van hol?
A metszéspont kordinátáinak mind a két egyenetet ki kell elégítenie.

Az e egyenesből: $\frac{x-5}{3}=\frac{y-2}{2} \quad \Rightarrow \quad x-5=3\frac{y-2}{2} \Rightarrow x=\frac{3y-6}{2}+5$

Az f egyenesből: $x-1=\frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3y-6}{2}+5\right)-1=\frac{y-1}{2}$

$$\frac{3y-6}{2}+4=\frac{y-1}{2} \quad \Bigg| -\frac{3y-6}{2}$$

$$4=\frac{y-1}{2}-\frac{3y-6}{2}=\frac{-2y-7}{2} \quad \Rightarrow \quad 8=-2y-7 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{15}{2}$$

$$x-1=\frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow \quad x-1=\frac{\frac{-15}{2}-\frac{2}{2}}{2}=\frac{-17}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-13}{4}$$

Ez a két egyenes xy síkvetületének (e’, f ’) metszéspontja. A két egyenesnek akkor van metszéspontja, ha az xy koordinátákat behelyettesítve mindkét egyenesnél azonos z értéket kapunk.

$$e: \frac{y-2}{2}=\frac{z}{4} \Rightarrow \frac{\frac{-15}{2}-\frac{4}{2}}{2}=\frac{z}{4} \Rightarrow \frac{19}{4}=\frac{z}{4} \Rightarrow z=19$$

$$f: \frac{y-1}{2}=z+2 \Rightarrow \frac{\frac{-15}{2}-\frac{2}{2}}{2}=z+2 \Rightarrow \frac{-17}{4}=z+2 \Rightarrow z=\frac{-25}{4}$$

A két egyenesnek nincs metszéspontja, a két egyenes kitérő.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Adott két egyenes $e: \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{4}$

$$f: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$$

Ebből ’e’-re: $\mathbf{r_{0e}}$ = (5,2,0) $\mathbf{v_e}$ = (3,2,4)

’f’-re: $\mathbf{r_{0f}}$ = (2,1,-1) $\mathbf{v_f}$ = (3,2,4)

Van e metszéspontjuk, és ha van hol?

Az e egyenesből: $\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} \quad \Rightarrow \quad x-5 = 3\frac{y-2}{2} \Rightarrow x = \frac{3y-6}{2} + 5$

Az e egyenesből: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(\frac{3y-6}{2}+5\right)-2}{3} = \frac{y-1}{2}$

$$\frac{\frac{3y-6}{2}+3}{3} = \frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3y-6}{2} + 3 = 3\frac{y-1}{2} \quad \Big| -\frac{3y-6}{2}$$

$3 = \frac{3y-3}{2} - \frac{3y-6}{2} = \frac{0y+3}{2}$ ellentmondásra jutottunk, a két egyenes xy vetületének sincs metszéspontja. A két egyenes irányvektora alapján megállapítható, hogy a két egyenes párhuzamos.

Adott két egyenes $e: x-4 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$

$f: x-3 = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$ Van e metszéspontjuk, és ha van hol?

Ebből ’e’-re: $\mathbf{r_{0e}}$ = (4,3,1) $\mathbf{v_e}$ = (1,2,3)

’f’-re: $\mathbf{r_{0f}}$ = (3,1,-2) $\mathbf{v_f}$ = (1,2,3)

$$e: x-4 = \frac{y-3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-3}{2} + 4$$

$$f: x-3 = \frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y-3}{2}+4\right) - 3 = \frac{y-1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y-3}{2} + 1 = \frac{y-1}{2} \quad \Big| -\frac{y-3}{2}$$

$1 = \frac{y-1}{2} - \frac{y-3}{2} = \frac{0y-2}{2}$ azonosságot kaptunk. A két egyenes irányvektora alapján megállapítható, hogy a két egyenes párhuzamos, továbbá ha az egyik egyenes $\mathbf{r_0}$ pontjának koordinátái kielégítik a másik egyenes egyenletét: a két egyenes egybevágó.

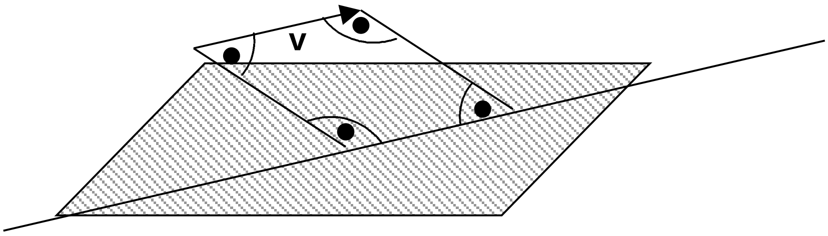
PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Sík egyenlete

A sík egyenlete egy a koordinátákkal, vagy a helyvektorokkal felírt egyenlet, melynek megoldáspontjainak koordinátái a síkra esnek. Azaz az adott sík egyenletét az adott sík, de csakis adott sík pontjai elégítik ki (behelyettesítve azonosságot adnak).

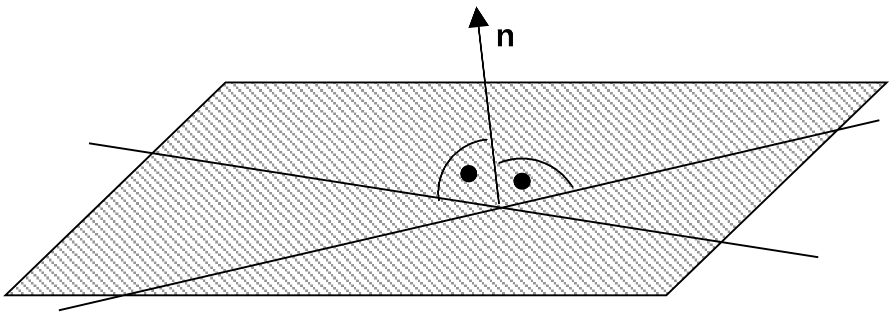
Vektor és sík párhuzamossága

Egy vektor akkopr párhuzamos egy síkkal, ha a síkban húzható a vektorral párhuzamos egyenes.



Sík normálvektora

A sík normálvektora minden olyan vektor amely merőleges a síkra, azaz merőleges a sík két nem párhuzamos egyenesére. A normálvektor jele: **n**. A normálvektor előállítható két a síkkal párhuzamos, de egymással nem párhuzamos vektor vektoriális szorzataként.



Sík kétparaméteres egyenlete

A sík kétparaméteres egyenletéhez meg kell adnunk a sík egy ismert pontjának helyvektorát ($\mathbf{r_0}$), valamint két a síkkal párhuzamos vektort, melyek egymással nem párhuzamosak ($\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$), továbbá felveszünk két paramétert (t, u), melyek a (-∞,∞) intervallumban vehetnek fel értéket, és minden egyes kiválasztott értékekhez a sík egy pontjának helyvektora tartozik (**r**).

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_1} \cdot t + \mathbf{v_2} \cdot u$$

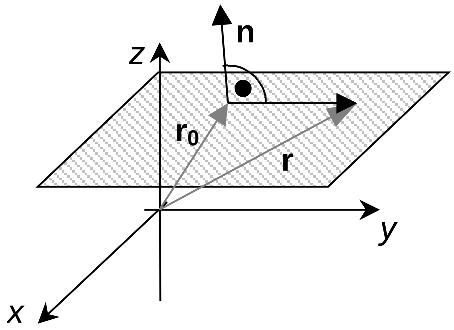
Ez az egyenlet a két paraméter miatt nehézkesen használható.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

Sík normálvektoros egyenlete

A sík normálvektoros egyenletéhez meg kell adnunk a sík egy ismert pontjának helyvektorát (**r₀**), valamint normálvektort (**n**). Ekkor a sík pontjai azok, amelyekhez az **r₀** pontból húzott vektor (**r-r₀**) merőleges a normálvektorra, azaz a két vektor skaláris szorzata 0.

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\mathbf{n}=0$$



Kordinátákkal felírva:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\mathbf{n}=0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-x_0)\cdot n_x+(y-y_0)\cdot n_y+(z-z_0)\cdot n_z=0$$

Az **n** = (n_x, n_y, n_z) vektor koordinátáit szokás (A, B, C) elnevezéssel is felírni.

$$(x-x_0)\cdot A+(y-y_0)\cdot B+(z-z_0)\cdot C=0$$

$$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z-(A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0)=0$$

$A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z-D=0$ ahol $D=A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0$

Példák:

- Adott az $s1: 3x-2y+z-2=0$ egyenletű sík és az $\frac{3-x}{2}=\frac{y-2}{3}=z+1$ egyenletű egyenes. Adja meg a döféspont koordinátáit.
 A döféspontnak ki kell elégítenie mind a két gyenletet. Az egyenes egyenletéből rögtön 2 egyenletet tudunk csinálni, a harmadik a sík egyenlete:

$$I.: \frac{3-x}{2}=\frac{y-2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\frac{3-x}{2}+2=y \quad \Rightarrow \quad y=\frac{13-3x}{2}$$

$$II.: \frac{3-x}{2}=z+1 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{3-x}{2}-1 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{1-x}{2}$$

$$III.: 3x-2y+z-2=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-2\frac{13-3x}{2}+\frac{1-x}{2}-2=0$$

$$6x-26+6x+1-x-4=0 \quad \Rightarrow \quad 11x-29=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{29}{11}$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$y=\frac{13-3x}{2}=\frac{13-3\cdot\left(\frac{29}{11}\right)}{2}=\frac{28}{11} \qquad \Rightarrow \qquad z=\frac{1-x}{2}=\frac{1-\left(\frac{29}{11}\right)}{2}=\frac{-9}{11}$$

A döféspont koordinátája: $\left(\frac{29}{11},\frac{28}{11},\frac{-9}{11}\right)$

- Párhuzamos-e a $x+3y-5z+2=0$ egyenletű sík és az $x-1=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{2}$ egyenletű egyenes.

Párhuzamosak, ha az egyenes irányvektora merőleges a sík normálvektorára.
A sík normálvektora: **n** = (1, 3 , -5)
Az egyenes irányvektora: **v** = (1, 3, 2)

Két vektor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0.

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=n_1v_1+n_2v_2+n_3v_3=1\cdot1+3\cdot3+(-5)\cdot2=0 \Rightarrow$ párhuzamosak.

- Párhuzamosak-e egymással a $\mathbf{v_1}$ = (-2, -6, 10) vektor és a $x-1=\frac{y-3}{3}=\frac{1-z}{5}$ egyenletű egyenes.

Párhuzamosak, ha az egyenes irányvektorának és a $\mathbf{v_1}$ vektornak vektoriális szorzata 0.

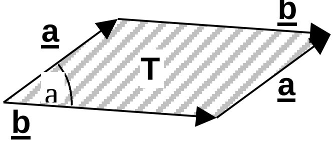
Az egyenes irányvektora: **v** = (1, 3 , -5)

$$\mathbf{v_1}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 3 & -5\\ -2 & -6 & 10\end{vmatrix}=\mathbf{i}\cdot(3\cdot10-(-6)\cdot(-5))-\mathbf{j}\cdot(1\cdot10-(-2)\cdot(-5))+\mathbf{k}(1\cdot(-6)-(-2)\cdot3)=0$$

$\Rightarrow$ párhuzamosak.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

- Mekkora az **a** = (1, 3, 5) és a **b** = (4, 1, 7) vektorok által határolt paralelogramma területe? Mekkora a két vektor által bezárt szög?



A kérdezett terület a két vektor vektoriális szorzatának abszolút értéke (lsd vektoriális szorzat)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot(3\cdot 7 - 1\cdot 5) - \mathbf{j}\cdot(1\cdot 7 - 4\cdot 5) + \mathbf{k}(1\cdot 1 - 4\cdot 3) = (16,-13,-11)$$

$$T = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{16^2 + (-13)^2 + (-11)^2} = \sqrt{546} \approx 23.36$$

Továbbá a paralelogramma területképletéből:

$$T = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(a)$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35} \approx 5.916$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{66} \approx 8.124$$

$$\sin(a) = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{\sqrt{546}}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{66}} = \sqrt{\frac{546}{35\cdot 66}} \approx 0.4862 \qquad \Rightarrow \qquad a = \arcsin(0.4862) \approx 29.09°$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com