Sorok

Sort kapunk, ha egy a_n sorozat elemeit összeadjuk, ekkor az a_n sorozatot a sor **reprezentáló sorozatának** nevezzük.
Véges sorról beszélünk, ha a sorozat véges darabszámú elemét adjuk össze pl. az első k páratlan sorszámú elem összege

$$\sum_{n=0}^{k-1} a_{2n+1} = a_1 + a_3 + ... + a_{2(k-1)+1}$$

Mivel ebben az esteben véges darabszámú komponenst kell összegezni, az összeg több-kevesebb idő alatt közvetlen összeadásokkal kiszámítható.
Végtelen sorról beszélünk, ha a sorozat összes (végtelen) elemét adjuk össze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ vagy írhatjuk így is } \sum a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Mivel ebben az esteben végtelen darabszámú komponenst kell összegezni, az összeget csak végtelen idő alatt lehetséges közvetlen összeadásokkal kiszámítani. Ezért a végtelen sor összegét más módon definiáljuk.

A végtelen sor a következők szerint viselkedhet.

- Minden határon túl növekszik *pl.* $\sum 1 = \infty$, illetve minden határon túl csökken *pl.* $\sum -1 = -$
- Oszcillál *pl.* $\sum (-1)^n$ *ha megnézzük a részösszegek sorozatát:* s_1*= -1,* s_2*= 0,* s_3*= -1,* s_4*= 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0…a végtelen összeg attól függ, hogy az m = páros va gy páratlan, de ezt nem tudhatjuk. Ezért, bár nem is nő vagy csökken minden határon túl, divergens.*
- A végtelen összeg egy véges szám. (*példa később*)

A (*végtelen*) **sor első m elemének részösszege** a következő véges sor:

$$\sum_{n=0}^{m} a_n = a_1 + a_3 + ... + a_m$$

A (*végtelen*) sor első m elemének részösszegét felhasználva képezhetünk egy sorozatot, ezt a **részösszegek sorozatának** s_m nevezzük:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3$$

$$s_m = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m = s_{m-1} + a_m$$

Belátható, hogy ha m akko r $s_m \to \sum a_n$. Ezért:

- Definíció: Egy végtelen sor összege megegyezik a részösszegek sorozatának határértékével, azaz:

$$\sum a_n = \lim_{m\to\infty} s_m$$

Ez alapján a végtelen sor összegének értékét a végtelen **sor határérték**ének nevezzük.
A fenti definíciót alkalmazva számítsuk ki a következő sor határértékét:

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$$

Írjuk fel a sorösszegek első néhány elemét:

$$s_1=\frac{1}{2}-1$$

$$s_2=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}-1$$

$$s_3=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}-1$$

…

$$s_m=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m+1}-1$$

Képezzük a részösszegek határértékét:

$$\lim_{m\to\infty}s_m=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m+1}-1\right)=-1\Rightarrow\sum a_n=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)=-1$$

$\sum c\cdot q^n$ **mértani sor**.

Középiskolában megtanultuk, hogy a mértani sor első m elemének részösszege:

$$\sum_{n=1}^{m}c\cdot q^n=c\cdot\frac{q^m-1}{q-1}$$

Képezzük a részösszegek határértékét:

$$\lim_{m\to\infty}\left(c\cdot\frac{q^m-1}{q-1}\right)_{\text{Ha}\,|q|<1}=c\cdot\frac{-1}{q-1}=c\cdot\frac{1}{1-q}\Rightarrow\sum c\cdot q^n=c\cdot\frac{1}{1-q};\text{Ha}\,|q|<1$$

A fenti a példákban kényelmesen fel tudtuk írni a részösszegek sorozatát, de nem minden esetben sikerül ezt kezelhető alakban előállítani. Az ilyen példáknál a sor határértékét ugyan nem tudjuk megállapítani, de talán meg tudjuk állapítani, hogy konvergens-e a sor vagy divergens. Erre az ún konvergenciakritériumokat fogjuk használni. Ezekben a sor reprezentáns sorozatát felhasználva próbáljuk a konvergencia vagy divergencia tényét megállapítani.

A sor definíciójából megállapíthatunk néhány egyszerűbb szabályt:

- $\sum a_n+\sum b_n=(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots)+(b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots)=a_1+b_1+a_2+b_2+\ldots+a_n+b_n+\ldots$
  $\sum a_n+\sum b_n=\sum(a_n+b_n)$
- $\sum c\cdot a_n=c\cdot a_1+c\cdot a_2+\ldots+c\cdot a_n+\ldots=c\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots)=c\cdot\sum a_n$
- Egy konvergens sorhoz tetszőleges véges darabszámú új (*véges értékű*) elemet hozzáadva, a sor konvergens marad (*Bár a határértéke ekkor megváltozik*). *Mert a véges darabszámú véges értékű elem csak véges (kiszámítható) értékkel változtatja az összeget.*
- Egy divergens sorból tetszőleges véges darabszámú (*véges értékű*) elemet elhagyva a sor divergens marad. *Mert a véges darabszámú véges értékű elem elhagyása csak véges*

(kiszámítható) konstans értékkelváltoztatja az összeget; a minden határon túl növő/csökkenő sor így marad minden határon túl növő/csökkenő, az oszcilláló is marad oszcilláló, csak most csak most a konstansal nagyobb/kisebb (a konstans előjelétől függően) értékek között oszcillál.

A **konvergencia szükséges feltétele**, hogy a reprezentáns sorozat határértéke 0 legyen. Ez könnyen belátható:

- ha az a_n sorozat minden határon túl nő, akkor az összege is minden határon túl nő
- ha az a_n sorozat oszcillál, akkor a részösszegek sorozata is oszcillál
- ha az a_n sorozat határértéke A 0, akko r a sorozatnak csak véges sok tagja nem fogja A-t tetszőlegesen kis mértékben megközelíteni, azaz a maradék végtelen sok tagja A-t fogja tetszőlegesen kis mértékben megközelíteni (*sorozat konvergenciájának definíciója*), ezért az összegben lesz végtelen sok nem A értékű (*nem* 0) tag lesz, így az összeg minden határon túl nő (*vagy csökken, ha A negatív*)
- ezért a $\sum a_n$ sor csak akkor lehet konvergens, ha az a_n sorozatnak csak véges sok tagja nem 0 vagy 0 közeli tetszőlegesen kis érték, azaz a sorozat végtelen sok tagja a 0-t fogja tetszőlegesen kis mértékben megközelíteni, azaz a határértéke $A = 0$ (*ismét a sorozat konvergenciájának definíciója*)

Képlettel:

Ha $\sum a_n$ konvergens, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(***!!!visszafelé nem igaz!!!*** *Pl.* $\sum \frac{1}{n}$ *sor divergens, pedig* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$)

Mivel ez a kritérium csak egy irányba működik, ezért vele csak a divergencia tényét lehet egyértelműen megvizsgálni. Azaz ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, akkor a sor divergens, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ akkor további vizsgálatok szükségesek.

Pl. konvergens-e $\sum a_n = \sum \frac{n^2 - 2n + 1}{4n^2 + 3n + 5}$?

Megvizsgálva a reprezentáns sorozatot:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{4n^2 + 3n + 5} = \frac{1}{4} \neq 0$ tehát a sor divergens.

Cauchy féle **hányadoskritérium**:

Szintén a reprezentáns sorozatot vizsgáljuk, a következők alapján.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} < 1 & \text{a sor konvergens} \\ 1 & \text{további vizsgálatok szükségesek} \\ > 1 & \text{a sor divergens} \end{cases}$$

Pl.: konvergens-e $\sum a_n = \sum \frac{n^2+1}{3^n}$?

Behelyettesítve a hányadoskritériumba:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+2n+2}{3\cdot 3^n}}{\frac{n^2+1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\cdot\frac{3^n}{3\cdot 3^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1} = \frac{1}{3} < 1$$

tehát a sor konvergens.

Konvergens-e $\sum a_n = \sum \frac{7^n}{n^3+2n-1}$?

Behelyettesítve a hányadoskritériumba:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^{n+1}}{(n+1)^2+2(n+1)-1}}{\frac{7^n}{n^2+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7\cdot 7^n}{n^2+4n+2}}{\frac{7^n}{n^2+2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{n^2+4n+2}\cdot\frac{7\cdot 7^n}{7^n} = 7\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{n^2+4n+2} = 7 > 1$$

tehát a sor divergens.

Gyökkritérium:

Szintén a reprezentáns sorozatot vizsgáljuk, a következők alapján.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1 & \text{a sor konvergens} \\ 1 & \text{további vizsgálatok szükségesek} \\ >1 & \text{a sor divergens} \end{cases}$$

Gyökkritériummal csak akkor tudunk számolni, ha az a_n sorozat csak pozitöv tagokbál áll!!

Pl. konvergens-e $\sum a_n = \sum \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$?

Mivel $n > 0$, így $n^2 + 1 > 0$ és $2n^2 + 1 > 0$, így a reprezentáló sorozat pozitív tagokból áll, használhatjuk a gyökkritériumot.

Behelyettesítve a hányadoskritériumba:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{tehát a sor konvergens}$$

Azoknál a soroknál, amelyeknél a két kritérium alapján nem tudunk dönteni, alkalmazzuk az **összehasonlító kritériumokat**.

- **majoránskritérium**: $\sum a_n$ konvergens, ha találunk egy olyan konvergens $\sum b_n$ sort, amelyre $|a_n| < |b_n|$ igaz véges számú elem kivételével minden elemre.

Ha van egy sok tagból álló összegünk, melynek értéke B; és van egy ugyanannyi de kisebb tagból álló másik összeg, akkor ennek értéke A < B. Ha végtelen sok tagból álló összegeket hasonlítunk össze, akkor A B.

- **minoránskritérium**: $\sum a_n$ divergens, ha találunk egy olyan divergens $\sum c_n$ sort, amelyre $|c_n| < |a_n|$ igaz véges számú elem kivételével minden elemre. *Ha egy végtelen sok tagból álló*

összeg minden határon túl növekszik, akkor a csupa nagyobb tagból álló összeg is minden határon túl fog nőni.

Ahhoz, hogy ezt a két kritériumot használhassuk, ismernunk kell pár konvergens illetve divergens sort, hogy legyen mivel összehasonlítani.

A két legfontosabb:

$\sum \frac{1}{n}$ minden határon túl nő $\qquad$ $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ konvergens

Pl. konvergens-e $\sum \frac{n-2}{3n^2+2n-5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2}{3n^2+2n-5} = 0$ $\qquad$ tehát lehet konvergens is.

Gyökkritériummal már meg sem vizsgáljuk, mert a kapott n. gyökös kifejezést nem tudnánk kezelni.

Hányadoskritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)-2}{3(n+1)^2+2(n+1)-5}}{\frac{n-2}{3n^2+2n-5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{3n^2+6n+3+2n+2-5}}{\frac{n-2}{3n^2+2n-5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{3n^2+8n}}{\frac{n-2}{3n^2+2n-5}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{3n^2+8n}}{\frac{n-2}{3n^2+2n-5}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{3n^2+2n-5}{3n^2+8n}\right) = 1$$ látható, hogy a hányadoskritérium nem segített.

Ha megnézzük a számláló és a nevező legnagyobb fokszámú elemének hányadosát, látható, hogy a reprezentáns sorozat $\frac{1}{n}$ nagyságrendű. Az $\frac{1}{n}$-vel képzett sor viszont divergens, ezért próbáljuk meg ezzel minorálni.

A minorálással a $\frac{n-2}{3n^2+2n-5}$ reprezentáns sorozatot alakítjuk biztosan kisebb (*esetleg egyenlő*) új sorozattá, lehetőleg úgy, hogy a legvégén $\frac{1}{n}$ nagyságrendű sorozatot kapjunk. Ehhez egy-egy lépésben a számláló értékét csökkenteni, a nevező értékét növelni kell.

$$\frac{n-2}{3n^2+2n-5} \underset{\text{számlálót növeljük 5-vel}}{>} \frac{n-2}{3n^2+2n} \underset{2n<2n^2}{>} \frac{n-2}{3n^2+2n^2} = \frac{n-2}{10n^2} = \frac{n}{10n^2} - \frac{2}{10n^2} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$$

Ha az eredményül kapott új reprezentáns sorozattal képzett sor divergens, akkor minorálja az eredeti sorunkat és ezért az is divergens lesz.

$$\sum \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = \frac{1}{10}\left(\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{2}{n^2}\right) = \frac{1}{10}\left(\sum \frac{1}{n} - 2\cdot\sum \frac{1}{n^2}\right)$$

A $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens, így a $\sum \frac{1}{10}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)$ is divergens, minorálja a $\sum \frac{n-2}{3n^2+2n-5}$ sort, ezért ez is divergens lesz.

Konvergens-e $\sum \frac{n+5}{7n^3+3n-3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{7n^3+3n-3} = 0$ tehát lehet konvergens is.

Gyökkritériummal ismét nem vizsgáljuk, mert a kapott n. gyökös kifejezést nem tudnánk kezelni.
Hányadoskritériummal:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)+5}{7(n+1)^3+3(n+1)-3}}{\frac{n+5}{7n^3+3n-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1+5}{7n^3+21n^2+21n+7+3n+3-3}}{\frac{n+5}{7n^3+3n-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{7n^3+21n^2+24n+7}}{\frac{n+5}{7n^3+3n-3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+6}{7n^3+21n^2+24n+7}}{\frac{n+5}{7n^3+3n-3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+6}{n+5}\cdot\frac{7n^3+3n-3}{7n^3+21n^2+24n+7}\right) = 1$$

A hányadosktitérium most sem segít.
Ha megnézzük a számláló és a nevező legnagyobb fokszámú elemének hányadosát, látható, hogy a reprezentáns sorozat $\frac{1}{n^2}$ nagyságrendű. Az $\frac{1}{n^2}$-vel képzett sor viszont konvergens, ezért próbáljuk meg ezzel majorálni.

A majorálással a $\frac{n+5}{7n^3+3n-3}$ reprezentáns sorozatot alakítjuk biztosan nagyobb (*esetleg egyenlő*) új sorozattá, lehetőleg úgy, hogy a legvégén $\frac{1}{n^2}$ nagyságrendű sorozatot kapjunk. Ehhez egy-egy lépésben a számláló értékét növelni, a nevező értékét csökkenteni kell.

$$\frac{n+5}{7n^3+3n-3} \underset{3n>0 \text{ ha elhagyjuk a nevezö kisebb lesz}}{<} \frac{n+5}{7n^3-3} \underset{-3>-3n^3}{<} \frac{n+5}{7n^3-3n^3} = \frac{n+5}{4n^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{n}{n^3}+\frac{5}{n^3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)$$

Ha az eredményül kapott új reprezentáns sorozattal képzett sor konvergens, akkor majorálja az eredeti sorunkat és ezért az is konvergens lesz.

$\sum \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum\frac{1}{n^2}+\sum\frac{5}{n^3}\right) = \frac{1}{4}\left(\sum\frac{1}{n^2}+5\sum\frac{1}{n^3}\right)$ konvergens, ha a $\sum\frac{1}{n^3}$ sor konvergens.

Ismét alkalmazva a majoránskritériumot:

$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n\cdot n^2} < \frac{1}{n^2}$ A $\sum\frac{1}{n^2}$ sorról pedig tudjuk, hogy konvergens.

Így a $\sum\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}\right)$ sor konvergens, és mert majorálja a $\sum\frac{n+5}{7n^3+3n-3}$ sort ezért ez is konvergens.