1. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2\cdot e^{2x}}{\cos(x)}\right)'=?$

A hányados deriválási szabálya alapján $\dfrac{f'}{g'}=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2\cdot e^{2x}}{\cos(x)}\right)^I=\frac{\left(x^2\cdot e^{2x}\right)^I\cdot\cos(x)-\left(x^2\cdot e^{2x}\right)\cdot(\cos(x))^I}{\cos^2(x)}$$

Mellékszámítások:

$$\boxed{\begin{aligned}&(\cos(x))^I=-\sin(x)\\&\left(x^2\cdot e^{2x}\right)^I=\left(x^2\right)^I\cdot e^{2x}+x^2\cdot\left(e^{2x}\right)^I=2\cdot x\cdot e^{2x}+x^2\cdot 2\cdot e^{2x}\end{aligned}}$$

Behelyettesítve:

$$f'(x)=\frac{\left(x^2\cdot e^{2x}\right)^I\cdot\cos(x)-\left(x^2\cdot e^{2x}\right)\cdot(\cos(x))^I}{\cos^2(x)}=\frac{\left(2\cdot x\cdot e^{2x}+x^2\cdot 2\cdot e^{2x}\right)\cdot\cos(x)-\left(x^2\cdot e^{2x}\right)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}=$$

$$=\frac{2\cdot x\cdot e^{2x}\cdot\cos(x)+x^2\cdot 2\cdot e^{2x}\cdot\cos(x)+x^2\cdot e^{2x}\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

2. Határozza meg $f(x)=e^x\cdot\cos(x)$ harmadfokú McLaurin polinomját!

Egy n-ed fokú McLaurin polinom képlete:

$$f_n(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

Az első tag:

$$f(0)=e^0\cdot\cos(0)=1$$

Harmadfokú polinomhoz meg kell határozni az első három deriváltat:

$$f^I(x)=\left(e^x\cdot\cos(x)\right)^I=\left(e^x\right)^I\cdot\cos(x)+e^x\cdot(\cos(x))^I=e^x\cdot\cos(x)-e^x\cdot\sin(x)=e^x\cdot(\cos(x)-\sin(x))$$

$$f^I(0)=e^0\cdot(\cos(0)-\sin(0))=1$$

$$f^{II}(x)=\left(e^x\cdot(\cos(x)-\sin(x))\right)^I=\left(e^x\right)^I\cdot(\cos(x)-\sin(x))+e^x\cdot(\cos(x)-\sin(x))^I=$$

$$=e^x\cdot(\cos(x)-\sin(x))+e^x\cdot(-\sin(x)-\cos(x))=-2\cdot e^x\cdot\sin(x)$$

$$f^{II}(0)=-2\cdot e^0\cdot\sin(0)=0$$

$$f^{III}(x)=\left(-2\cdot e^x\cdot\sin(x)\right)^I=-2\cdot\left(\left(e^x\right)^I\cdot\sin(x)+e^x\cdot(\sin(x))^I\right)=-2\cdot\left(e^x\cdot\sin(x)+e^x\cdot\cos(x)\right)=$$

$$=-2\cdot e^x\cdot(\sin(x)+\cos(x))$$

$$f^{III}(0)=-2\cdot e^0\cdot(\sin(0)+\cos(0))=-2$$

Behelyettesítve:

$$f_3(x)=f(0)+\frac{f^I(0)}{1!}\cdot x+\frac{f^{II}(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f^{III}(0)}{3!}\cdot x^3=1+1\cdot x+0\cdot x^2+(-2)\cdot x^3=1+x-2\cdot x^3$$

3. Számítsa ki a $f(x)=\int \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)\,dx$ függvényt!

A kiszámításhoz az integrandust át kell alakítani:

$$f(x)=\int \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)\,dx=\int \sin^2(x)\cdot\cos^2(x)\cdot\cos(x)\,dx$$

Kihasználva a $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1\rightarrow\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$ azonosságot:

$$f(x)=\int \sin^2(x)\cdot\left(1-\sin^2(x)\right)\cdot\cos(x)\,dx=\int\left(\sin^2(x)-\sin^4(x)\right)\cdot\cos(x)\,dx=$$

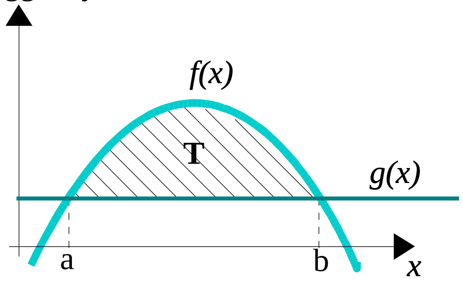
$$=\int\left(\sin^2(x)\cdot\cos(x)-\sin^4(x)\cdot\cos(x)\right)dx=\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx-\int \sin^4(x)\cdot\cos(x)\,dx$$

Használjuk fel a $\int g^{\alpha}(x)\cdot g^{I}(x)\,dx=\dfrac{g^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+C$ integrálási szabályt:

$$f(x)=\int \underbrace{\sin^2(x)}_{\substack{g^2(x)\\ g(x)=\sin(x)\rightarrow g^I(x)=\cos(x)\\ \alpha=2}}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{g^I(x)}\,dx-\int \underbrace{\sin^4(x)}_{\substack{g^4(x)\\ g(x)=\sin(x)\rightarrow g^I(x)=\cos(x)\\ \alpha=4}}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{g^I(x)}\,dx$$

$$f(x)=\frac{\sin^{2+1}(x)}{2+1}-\frac{\sin^{4+1}(x)}{4+1}+C=\frac{\sin^3(x)}{3}-\frac{\sin^5(x)}{5}+C$$

4. Határozza meg az $f=-x^2+4x+1$ és a $g=1$ függvények által közrezárt területet.



A megoldáshoz először csináljunk vázlatot!

Határozzuk meg a két metszéspont helyét (*a*, *b*)!

A metszéspontban *f(x)* = *g(x)*:

$$-x^2+4x+1=1$$

$$0=1+x^2-4x-1$$

$$0=\underbrace{x^2}_{a\cdot x^2+}-\underbrace{4x}_{b\cdot x+}\underbrace{+0}_{c}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\dot{a}}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot a}=\frac{4\pm4}{2}=\begin{Bmatrix}x_1=4\\x_2=0\end{Bmatrix}$$

Esetünkben $x_1=b$, $x_2=a$.

A **T** terület:

$$T=\int_0^4 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^4(-x^2+4x+1)-(1)\,dx=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\int_0^4-x^2\,dx+\int_0^4 4x\,dx=$$

$$=-\int_0^4 x^2\,dx+4\cdot\int_0^4 x\,dx=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4+4\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=-\left(\frac{4^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+4\cdot\left(\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=\frac{-4^3}{3}+4\cdot\frac{4^2}{2}=$$

$$=4^3\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{4^3}{6}$$

5. Határozza meg a $z=2x^2+y^2-4x+2y+4$ függvény szélsőértékhelyeit!

Állítsuk elő a parciális deriváltakat:

$$z_x^I(x,y)=4x+0-4+0+0=4x-4 \qquad z_y^I(x,y)=0+2y-0+2+0=2y+2$$

$$z_{xx}^{II}(x,y)=(4x-4)_x^I=4 \qquad z_{yy}^{II}(x,y)=(2y+2)_y^I=2$$

$$z_{xy}^{II}(x,y)=(4x-4)_y^I=0 \qquad z_{yx}^{II}(x,y)=(2y+2)_x^I=0$$

Szélsőértékhely ott lehet, ahol $z_x^I(x_{sz},y_{sz})=0$ és $z_y^I(x_{sz},y_{sz})=0$

$$\left\{\begin{matrix} 4x_{sz}-4=0 \\ 2y_{sz}+2=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x_{sz}=1 \\ y_{sz}=-1 \end{matrix}\right\}$$

Akkor lehet szélsőértékhely, ha

$$z_{xx}^{II}(x_{sz},y_{sz})\cdot z_{yy}^{II}(x_{sz},y_{sz})-\left(z_{xy}^{II}(x_{sz},y_{sz})\right)^2\neq 0$$

$4\cdot 2-(0)^2=8>0$ $\Rightarrow$ az x = 1, y = -1 helyen minimum van.

Lássuk hogy is néz ki ez a függvény: