1. $\left(\dfrac{e^x \cdot x^2}{\lg x}\right)' = ?$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{e^x \cdot x^2}{\lg x}\right)' = \frac{\left(e^x \cdot x^2\right)' \cdot \lg x - e^x \cdot x^2 \cdot (\lg x)'}{\lg^2 x}$$

$$\left(e^x \cdot x^2\right)' = \left(e^x\right)' \cdot x^2 + e^x \cdot \left(x^2\right)' = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x$$

$$(\lg x)' = (\log_{10} x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{\ln 10}(\ln x)' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

$$\left(\frac{e^x \cdot x^2}{\lg x}\right)' = \frac{\left(e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x\right) \cdot \lg x - e^x \cdot x^2 \cdot \left(\dfrac{1}{x \cdot \ln 10}\right)}{\lg^2 x} = \frac{e^x \cdot x^2 \cdot \lg x + 2e^x \cdot x \cdot \lg x - \dfrac{e^x \cdot x}{\ln 10}}{\lg^2 x}$$

2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ monotonitási szakaszok, szélsőértékhelyek, konkávság

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6$

$f'''(x) = 12$

Szélsőértékhely(ek) ott lehet(nek), ahol $f'(x) = 0$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{12} = \frac{6 \pm 18}{12} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Ezek akkor szélsőértékhely(ek), ha ott $f''(x) \neq 0$

$f''(x_1) = 12 \cdot 2 - 6 = 18 > 0 \quad \Rightarrow$ minimumhely

$f''(x_2) = 12 \cdot (-1) - 6 = -18 < 0 \quad \Rightarrow$ maximumhely

A függvénynek inflexiós pontja van ott, ahol $f''(x) = 0$ és $f'''(x) \neq 0$

$f'''(x) = 12$ minden x-re, ezért $f'''(x) \neq 0$ mindenhol igaz.

$$f''(x) = 12x - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$$

A maximumhely előtt szigorúan monoton nő: $(-\infty, -1)$

A maximumhely és a minimumhely között szigorúan monoton csökken: (-1, 2)

A minimumhely után szigorúan monoton nő: $(2, \infty)$

Az inflexiós pont maximumhely felőli oldalán konkáv: $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$

Az inflexiós pont minimumhely felőli oldalán konvex: $\left(\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

3. $\int \frac{\ln^2 2x}{x} dx = ?$ $\left(= \int \left(\frac{1}{x} \cdot \ln^2 2x \right) dx \right) = ?$

Mivel összetett fügvények szorzatáról van szó, a következő szabályokkal próbálkozhatunk:

A szorzat miatt:

1. $\int u(x)v^{|}(x)dx = u(x)v(x) - \int u^{|}(x)v(x)dx$

Az $\ln^2 2x$ összetett függvény miatt:

2. $\int g^a(x) \cdot g^{|}(x)dx = \begin{cases} a \neq -1, & \Rightarrow \int g^a(x) \cdot g^{|}(x)dx = \frac{g^{a+1}(x)}{a+1} + C \\ a = -1, & \Rightarrow \int \frac{g^{|}(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + C \end{cases}$

3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

A fenti szabályok egyikét próbáljuk alkalmazni.

Nézzük mindjárt az elsőt a függvények szorzatának parciális integrálját. A két tag közül azt érdemes *u'*-nek választani, amelyiket utána könnyebb integrálással *u*-vá alakítani.

$$\int \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln^2 2x}_{v} \right) dx = ?$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow u(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$v(x) = \ln^2 2x = (\ln 2x)^2 \Rightarrow v'(x) = ?$$

$$v = (g)^2 \quad \Rightarrow \quad v'(g) = 2g = 2\ln k = 2\ln 2x$$

$$g(k) = \ln k \quad \Rightarrow \quad g'(k) = \frac{1}{k} = \frac{1}{2x}$$

$$k(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad k'(x) = 2$$

$$v'(x) = v'(g) \cdot g'(k) \cdot k'(x) = 2\ln 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{2\ln 2x}{x}$$

$$\int \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln^2 2x}_{v} \right) dx = \underbrace{\ln|x|}_{u} \cdot \underbrace{\ln^2 2x}_{v} - \int \left(\underbrace{\ln|x|}_{u} \cdot \frac{2\ln 2x}{x} \right) dx + C$$

Látható, hogy a parciális interálással ezt a példát csak bonyolítani tudtuk. Próbáljuk meg a következő (2.) szabály szerint átalakítani:

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$\int g^a(x)\cdot g^{|}(x)dx=\frac{g^{a+1}(x)}{a+1}+C$$

$$\int\left(\frac{1}{x}\cdot\ln^2 2x\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}\cdot(\ln 2x)^2\right)dx$$

Nézzük meg, ha $(\ln 2x)^2=g^2(x)$, $(a=2)$, akkor lehet-e $\frac{1}{x}$ $g'(x)$ konstansszorosa:

$$g(x)=\ln 2x\Rightarrow g'(x)=?$$

$$g(v)=\ln v \quad\Rightarrow\quad g'(v)=\frac{1}{v}=\frac{1}{2x}$$

$$v(x)=2x \quad\Rightarrow\quad v'(x)=2 \quad\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}$$

$$\int\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\cdot\underbrace{(\ln 2x)^2}_{g^a(x)}\right)dx=\frac{(\ln 2x)^{2+1}}{2+1}+C=\frac{1}{3}\ln^3 2x+C$$

4. $y=\sqrt[3]{x^5}$ alkotójú forgástest térfogata az [1,3] intervallumban.

Forgástest térfogata:

$$V=p\int_a^b f^2(x)dx=p\int_1^3\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2dx=p\int_1^3\sqrt[3]{x^{10}}dx=p\int_1^3 x^{\frac{10}{3}}dx=p\left[\frac{x^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1}\right]_1^3=p\left[\frac{x^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3}}\right]_1^3=$$

$$=\frac{3p}{13}\left[3^{\frac{13}{3}}-1^{\frac{13}{3}}\right]$$

5. $z=x^2+xy+y^2-2x+3y$ van-e szélsőértékhelye?

$$z'_x=2x+y+0-2+0=2x+y-2$$
$$z'_y=0+x+2y-0+3=x+2y+3$$

$$z''_{xx}=2+0-0=2$$
$$z''_{xy}=0+1-0=1$$
$$z''_{yy}=0+2+0=2$$

Szélsőérték ott lehet, ahol:
$z'_x=0$ és $z'_y=0$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

$$2x+y-2=0 \quad \Rightarrow \quad y=2-2x$$
$$x+2y+3=0 \quad \Rightarrow \quad x+2(2-2x)+3=0$$
$$x+4-4x+3=0$$
$$x=\frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad y=2-2\frac{7}{3}=\frac{6}{3}-\frac{14}{3}=-\frac{8}{3}$$

Az $(x,y)=\left(\frac{7}{3},-\frac{8}{3}\right)$ pontban akkor lehet szélsőérték, ha ott $z''_{xx}\cdot z''_{yy}-z''^{\,2}_{xy}>0$

$z''_{xx}\cdot z''_{yy}-z''^{\,2}_{xy}=2\cdot 2-1=3>0 \quad \Rightarrow$ a fenti pontban a függvénynek szélsőértékhelye van.

Mivel az $(x,y)=\left(\frac{7}{3},-\frac{8}{3}\right)$ pontban $z''_{xx}=2>0$ ezért ott a függvénynek minimuma van.

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com