Matek 2. vizsgasor

1.)

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ függvény vizsgálata: szélsőértékhelyek, monotonitási szakaszok, konvexitási szakaszok.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$

$f''(x) = 12x + 6$

A lehetséges szélsőértékhelyek az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldása(i)nál lehetnek:

$$6(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

Az x_1 = -3 illetve x_2 = 2 megoldás csak akkor szélsőértékhelyek, ha $f''(x_1) \neq 0$ illetve ha $f''(x_2) \neq 0$

$f''(x_1) = 12 \cdot (-3) + 6 = -30 < 0$ valóban szélsőértékhely, itt maximum van $f''(x_1) < 0$

$f''(x_1) = 12 \cdot (2) + 6 = 30 > 0$ valóban szélsőértékhely, itt minimum van $f''(x_2) > 0$

A függvény szigoúan monoton nő egy intervallumon, ha ott $f'(x) > 0$, és szigorúan monoton csökken az intervallumon, ha ott $f'(x) < 0$. Ezeket az intervallumokat az $f'(x) = 0$ helyek határolják.

Balról haladva az *x* – tengelyen az első $f'(x) = 0$ hely, x_1 = -3, egy maximum. Tőle balra a függvény csak szigorúan monoton növekvő lehet (különben nem lenne maximum):

(-∞,-3) intervallumon szigorrúan monoton nő

A maximumhely és a minimumhely (x_2 = 2) között, szigorúan monoton csökken:

(-3,2) intervallumon szigorrúan monoton csökken

A minimumhelytől jobbra a függvény csak szigorúan monoton növekvő lehet (különben nem lenne minimum):

(2,∞) intervallumon szigorrúan monoton nő

Az inflexiós pont (átmenet a konvex-konkáv jelleg között) helyét az $f''(x) = 0$ egyenlet megoldása(i) adják meg.

$$12x + 6 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$$

A függvény konvex egy intervallumon, ha ott $f''(x) > 0$, és konkáv az intervallumon, ha ott $f''(x) < 0$. Ezeket az intervallumokat az $f''(x) = 0$ helyek határolják.

A függvény egyetlen $f''(x) = 0$ helye az $x_3 = -\frac{1}{2}$. Tőle balra és jobbra az $f''(x)$ függvény nem vált előjelet. Tőle balra az x_1 = -3 helyen $f''(x_1) < 0$, így az inflexiós ponttól balra a függvény mindenhol konkáv:

(-∞,-0.5) intervallumon konkáv

Jobbra az x_2 = 2 helyen $f''(x_2) > 0$, igy az inflexiós pont jobb oldalán a függvény konvex:

(-0.5,∞) intervallumon konvex

2.)

Fejtse az $f(x) = x + \sqrt{x}$ függvényt Taylor sorba 3 tagig az $x_0 = 1$ hely körül.
A Taylor sor képlete:

$$t_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Három taghoz meg kell határozni $f'(x_0)$-t és $f''(x_0)$-t:

$$f(x) = x + x^{\frac{1}{2}} \qquad f(x_0) = 1 + \sqrt{1} = 2$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(x_0) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1.5$$

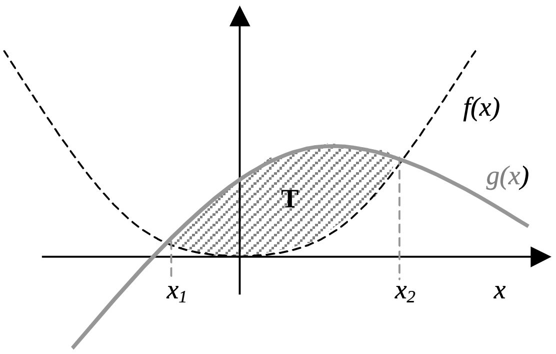
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) \qquad f''(x_0) = -\frac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1^3}} = -\frac{1}{4}$$

A Taylor polinom:

$$t_3(x) = 2 + \frac{1.5}{1}(x-1) + \frac{-\frac{1}{4}}{2}(x-1)^2 = 2 + 1.5\cdot(x-1) - \frac{1}{4}\cdot(x-1)^2$$

3.)

Határozza meg az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = -3x^2 + 12x - 8$ görbék közötti területet!
Először meg kell határozni x_1 és x_2-t.



$f(x_1) = g(x_1)$ és $f(x_2) = g(x_2)$ alapján:

$$f(x) - g(x) = 0 = 4x^2 - 12x + 8$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 4\cdot 8}}{8} = \frac{12 \pm 4}{8} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

A terület:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} (g(x) - f(x))dx$$

$$T = \int_1^2 (-4x^2 + 12x - 8)dx = -4\int_1^2 x^2 dx + 12\int_1^2 x dx - 8\int_1^2 1 dx = -4\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 12\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 8[x]_1^2 =$$

$$= -4\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + 12\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - 8(2-1) = \frac{2}{3}$$

4.)

Oldja meg parciális integrálással $\int x \cdot \cos(3x)dx$

$$\int \underbrace{(x)}_{u} \cdot \left(\underbrace{\cos(3x)}_{v'} \right) dx = \underbrace{(x)}_{u} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \sin(3x)}_{v} \right) - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \sin(3x)}_{v} \right) dx = \frac{1}{3} x \cdot \sin(3x) - \frac{1}{3} \int \sin(3x) dx =$$

$$= \frac{1}{3} x \cdot \sin(3x) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x) \right) = \frac{1}{3} x \cdot \sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

5.)

Van-e az alábbi függvénynek szélsőértékhelye és ha van, hol?

$z = x^2 + 2y^2 + xy - 2x + 4y + 5$

A szélsőérték létezésének feltételei:

1. $z'_x(x_0, y_0)_x = 0$
2. $z'_y(x_0, y_0) = 0$ és
3. $z''_{xx}(x_0, y_0) \cdot z''_{yy}(x_0, y_0) - (z''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$

-ha $z''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ akkor minimum, ha $z''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ akkor maximum

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = z'_x(x_0, y_0) = 2x_0 + y_0 - 2 \qquad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = z'_y(x_0, y_0) = 4y_0 + x_0 + 4$$

$$\frac{\partial z'_x(x_0, y_0)}{\partial x} = z''_{xx}(x_0, y_0) = 2 \qquad \frac{\partial z'_y(x_0, y_0)}{\partial y} = z''_{yy}(x_0, y_0) = 4$$

$$\frac{\partial z'_x(x_0, y_0)}{\partial y} = z''_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial z'_y(x_0, y_0)}{\partial x} = z''_{yx}(x_0, y_0) = 1$$

Az 1. és 2. felétel alapján:

$I.: 2x_0 + y_0 - 2 = 0$

$II.: 4y_0 + x_0 + 4 = 0$

Az I.-t átrendezve és behelyettesítve a II.-ba:

$I.: y_0 = 2 - 2x_0$

$II.: 4(2 - 2x_0) + x_0 + 4 = 0$

$II.: 8 - 8x_0 + x_0 + 4 = 0$

$$II.: -7x_0 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_0 = \frac{12}{7}} \quad \Rightarrow \quad \underline{y_0 = 2 - 2\frac{12}{7} = -\frac{10}{7}}$$

A 3. feltétel alapján:

$z''_{xx}(x_0, y_0) \cdot z''_{yy}(x_0, y_0) - (z''_{xy}(x_0, y_0))^2 = 2 \cdot 4 - 1^2 = 7 > 0$ $\Rightarrow$ valóban szélsőértékhely,

$z''_{xx}(x_0, y_0) = 2 > 0$ $\Rightarrow$ minimuma van az (x_0, y_0) = $\left(\frac{12}{7}, -\frac{10}{7} \right)$ helyen.