Vektorok

A vektorok korábbi definícióját használjuk fel: a vektor összetartozó szám n-es.

A vektorban összetartozó elemek számát (n) a vektor dimenziójának nevezzük.

Oszlopvektor: a vektor elemeit egymás alá írjuk fel: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$

Sorvektor: a vektor elemeit egymás mellé írjuk fel: $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$

Vektorok összeadása:

Mint a korábban, az azonos pozíción lévő kompononeseket őszegezük, de oszlopvektort csak oszlopvektorral, sorvektort csak sorvektorral lehet összegezni, ha az összeadandó vektorok dimenziója megegyezik.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \dots \\ a_n \pm b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 & a_2 \pm b_2 & \dots & a_n \pm b_n \end{bmatrix}$$

Vektorok szorzása

Csak sor-oszloppal, csak azonos dimenziójú vektorok szorozhatók össze.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

(*Ez a vektorok skaláris szorzásának megfelelője*)

Vektrorok lineáris kombinációja

Az $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, x_3… vektorok lineáris kombinációjának nevezzük a $l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + l_3 \cdot \mathbf{x_3} + \dots$ összeget, ahol λ_1, λ_2, λ_3 … tetszőleges konstansok.

Vektorok lineáris függetlensége

Az $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, x_3… x_n vektorok lineárisan összefüggők, ha közülük legalább egyet elő lehet a többi lineáris kombinációjával állítani; lineárisan függetlenek, ha közülük egyet sem lehet a többi lineáris kombinációjával előállítani.
Ha az $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, x_3… x_n vektorok lineárisan összefüggők, akkor van közöttük egy olyan x_k vektor, amelyikre:

$$l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + \ldots + l_{k-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + l_{k+1} \cdot \mathbf{x}_{k+1} + \ldots + l_n \cdot \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_k$$

Ekkor $l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + \ldots + l_{k-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k + l_{k+1} \cdot \mathbf{x}_{k+1} + \ldots + l_n \cdot \mathbf{x}_n = 0$

$l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + \ldots + l_{k-1} \cdot \mathbf{x}_{k-1} + l_k \cdot \mathbf{x}_k + l_{k+1} \cdot \mathbf{x}_{k+1} + \ldots + l_n \cdot \mathbf{x}_n = 0$ ahol $l_k = -1$

Ez alapján, ha az $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, x_3… x_n vektorok lineárisan összefüggők, akkor van olyan λ_1, λ_2, λ_3 … λ_n lineáris kombinációjuk, amely előállítja a 0-t, és λ_1, λ_2, λ_3 … λ_n nem csupa 0-ból áll (*ez utóbbit hívnánk triviális megoldásnak*).

Az $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, x_3… x_n vektorok **lineárisan összefüggők**, ha a $l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + l_3 \cdot \mathbf{x_3} + \ldots = 0$ egyenletnek **nem csak** a **l_1=0, l_2=0, l_3=0 … triviális megoldás** tesz eleget.

Az $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, x_3… x_n vektorok **lineárisan függetlenek**, ha a $l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + l_3 \cdot \mathbf{x_3} + \ldots = 0$ egyenletnek **csak a l_1=0, l_2=0, l_3=0 … triviális megoldás** tesz eleget.

Pl: $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e?

$$l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + l_3 \cdot \mathbf{x_3} = 0$$

A triviális megoldás a λ_1=0, λ_2=0, λ_3=0, lássuk van e ezen kívül más:

$$l_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} I.:&\ l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot (-1) + l_3 \cdot 1 = 0 \\ II.:&\ l_1 \cdot 2 + l_2 \cdot 0 + l_3 \cdot 4 = 0 \\ III.:&\ l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 1 + l_3 \cdot 3 = 0 \end{aligned}$$

A II. egyenletből: $l_1 = \frac{-4}{2} l_3 = -2 l_3$

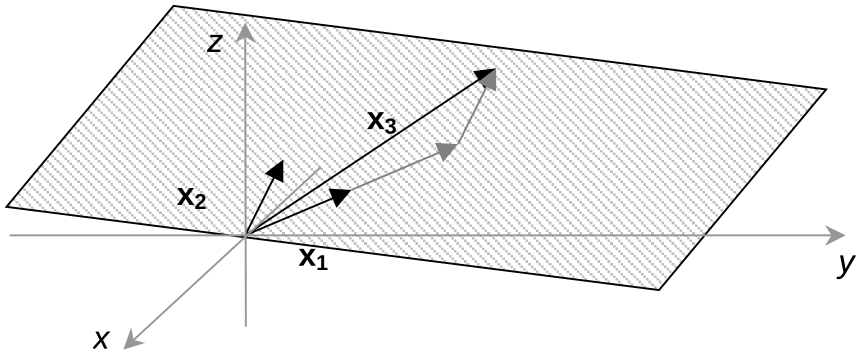
Behelyettesítve III.-ba: $-2l_3 \cdot 1 + l_2 \cdot 1 + l_3 \cdot 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_3 + l_2 = 0$

$-l_3 = l_2$

Behelyettesítve I.-be: $-2l_3 \cdot 1 + (-l_3) \cdot (-1) + l_3 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$-2l_3 + l_3 + l_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0l_3 = 0$

Ez mit is jelent? Bármekkora λ_3-t választhatok, ha emellett $\lambda_2 = -\lambda_3$ és $\lambda_1 = -2\lambda_3$ akkor teljesül $l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + l_3 \cdot \mathbf{x_3} = 0$ egyenlet, azaz nem csak a triviális megoldás létezik, a három vektor nem lineárisan független. Ez most könnyen ellenőrizhető, mert $\mathbf{x_3} = 2 \cdot \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$, azaz $\mathbf{x_3}$ az $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$–nek egy lineáris kombinációja, $\mathbf{x_3}$ benne van az $\mathbf{x_1}$ és $\mathbf{x_2}$ által kifeszített síkban.



Pl: $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok lineárisan függetlenek-e?

$$l_1 \cdot \mathbf{x_1} + l_2 \cdot \mathbf{x_2} + l_3 \cdot \mathbf{x_3} = 0$$

A triviális megoldás a λ_1=0, λ_2=0, λ_3=0, lássuk van e ezen kívül más:

$$l_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I.: \; l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot (-1) + l_3 \cdot 1 = 0$$
$$II.: \; l_1 \cdot 2 + l_2 \cdot 0 + l_3 \cdot 4 = 0$$
$$III.: \; l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot 1 + l_3 \cdot 1 = 0$$

A II. egyenletből: $l_1 = \frac{-4}{2} l_3 = -2l_3$

Behelyettesítve III.-ba: $-2l_3 \cdot 1 + l_2 \cdot 1 + l_3 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -l_3 + l_2 = 0$
$l_3 = l_2$
Behelyettesítve I.-be: $-2l_3 \cdot 1 + l_3 \cdot (-1) + l_3 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow$

$-2l_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 = 0$

Azaz csak a triviális megoldás létezik, a három vektor lineárisan független.

Mátrixok

A mátrix egy n dimenziós vektorokból képzett m dimenziós vektor, vagy m dimenziós vektorokból képzett n dimenziós vektor, mindkét megfogalmazás ugyanaz. A mátrixokkak kettős aláhúzással vagy **félkövér** betűtípussal jelöljük.

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}] \\ [a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}] \\ & \dots & & \\ [a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}] \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mátrixok összeadása:

Csak azonos sor és oszlposzámú mátrixok adhatók össze. Mindig az azonos pozíción lévő komponeneseket összegezzük.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Csak akkor szorozhatók össze, ha a bal oldali oszlopszáma megegyezik a jobb oldali sorszámámával ($\underline{\mathbf{A}}$ k x n-es, $\underline{\mathbf{B}}$ n x p-s). Az eredmény ekkor egy k x p-s mátrix lesz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kp} \end{bmatrix}$$

Ahol a c_{xy} elemet úgy kapjuk meg, mintha a bal oldali mátrix x. sorvektorát összeszoroznánk a jobb oldali mátrix y. oszlopvektorával.

Speciális eset, amikor a bal oldali egy oszlopvektor, a jobb oldali egy sorvektor:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \ldots & a_1 \cdot b_n \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \ldots & a_2 \cdot b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \ldots & a_n \cdot b_n \end{bmatrix}$$

Szintén speciális esete, amikor a jobb oldali mátrix egy oszlopvektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = c_1 \qquad \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = c_2 \qquad \ldots$$

Mátrix szorzása konstanssal

A mátrix minden elemét be kell szorzni a szorzó konstanssal.

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \ldots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \ldots & k \cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k \cdot a_{k1} & k \cdot a_{k2} & \ldots & k \cdot a_{kn} \end{bmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

A mátrix transzponálásakor felcseréljük a sorokat az oszlopokkal (másképpen: a főátlóra tükrözzük). Az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ transzponáltát $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{\mathbf{T}}$-vel jelöljük.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Egységmátrix

Egy olyan négyzetes mátrix, melynek főátlójában 1-k állnak, a többi helyen 0-k.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Tulajdonsága:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Mátrix inverze

Az az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ mátrix, amellyel $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ –t beszorozva, jobbról vagy balról, egységmátrixot kapunk.

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$$

Az inverz számítására a determinánsok fejezet után térünk vissza.

Mátrix rangja

Egy mátrix rangja r, ha az oszlop- vagy sorvektorai közül r db lineárisan független van.

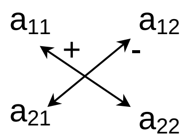
Determináns

Jele: $Det(\underline{\mathbf{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{vmatrix}$

Egy $\underline{\mathbf{A}}$ mátrix determinánsa egy a mátrixra jellemző szám amit a következő szabály alapján számítunk ki:

Ha a mátrix 2x2-es:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ azaz keresztbe szorzunk, és összegzünk az ábra szerinti előjelekkel.



Ha a mátrix 3x3-as:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ezt úgy mondjuk, hogy kifejtjük egy sorára.
Először a determináns egy sorát kiválasztjuk, esetünkben ez az első sor. Alkalmazzuk a sakktábla szabályt **a kiválasztott sorra**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \leftrightarrow \begin{vmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kiválasztjuk a sor első elemét, letakarjuk az elemet tartalmazó sort és oszlopot, a fennmaradó 2x2-es részmátrix determinását megszorozzuk az első elemmel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kiválasztjuk a sor következő elemét (nem feledkezünk meg a sakktábla szabályról), letakarjuk az elemet tartalmazó sort és oszlopot, a fennmaradó 2x2-es részmátrix determinását megszorozzuk az elemmel:

$$\begin{vmatrix} & -a_{12} & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kiválasztjuk a sor következő elemét, letakarjuk az elemet tartalmazó sort és oszlopot, a fennmaradó 2x2-es részmátrix determinását megszorozzuk az elemmel:

$$\begin{vmatrix} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix} \Rightarrow a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Az így kiszámított 3 értéket összegezve kapjuk meg a mátrix determinánsát.

A determinánst bármelyik sorra kifejthetjük, csak a sakktábla szabály szerinti előjeleket kell figyelembe venni a kiválasztott sorra.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ha a mátrix 4x4-es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{32} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{31} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{31} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Most is egy sorára fejtjük ki, csak letakarások után 3x3-as részmátrixok maradnak, melyek mindegyikét az előző pontban létott módon kell kiszámolni. A sakktábla szabályt itt is figyelembe kell venni a kiválasztott sornál!

Néhány szabály:

1. A determináns bármelyik sorára kifejthető
2. A determináns értéke nem változik, ha bármelyik sorához hozzáadjuk egy másik sorának konstansszorosát
3. Ha az **A** mátrix sorai lineárisan összefüggők, akkor Det(**A**) = 0
4. Det(**A**) = Det($\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$) $\Rightarrow$ a sorokra megállapított szabályok oszlopokra is érvényesek
5. Ha az **A** mátrix főátlója alatt vagy felett csupa 0 áll, akkor a determinánsa a főátló elemeinek szorzata:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

6. Ha a determináns két sorát felcseréljük, a determináns szozódik –1-el.

A 2. és az 5. szabályok felhasználásával a determináns kiszámításásnak egy másik módszere (bővebben lásd Gauss módszer):

$$Det(\underline{\mathbf{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{vmatrix}$$

- Az első sort megszorozzuk $\frac{-a_{21}}{a_{11}}$-vel majd hozzáadjuk a második sorhoz. A második sor első eleme így 0.
- Az első sort megszorozzuk $\frac{-a_{31}}{a_{11}}$-vel majd hozzáadjuk a harmadik sorhoz. A harmadik sor első eleme így 0.
- …
- Az első sort megszorozzuk $\frac{-a_{n1}}{a_{11}}$-vel majd hozzáadjuk az n. sorhoz. Az n. sor első eleme így 0.

$$Det(\underline{\mathbf{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}' & \dots & a_{nn}' \end{vmatrix}$$

- Az második sort sort megszorozzuk $\frac{-a_{32}'}{a_{22}'}$-vel majd hozzáadjuk a harmadik sorhoz. A harmadik sor második eleme így 0.

- Az második sort sort megszorozzuk $\frac{-a_{42}^{!}}{a_{22}^{!}}$ -vel majd hozzáadjuk a negyedik sorhoz. A negyedik sor második eleme így 0.
- …
- Az második sort sort megszorozzuk $\frac{-a_{n2}^{!}}{a_{22}^{!}}$ -vel majd hozzáadjuk az n. sorhoz. Az n. sor második eleme így 0.

$$Det(\underline{\mathbf{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{!} & a_{23}^{!} & \dots & a_{2n}^{!} \\ 0 & 0 & a_{33}^{!!} & \dots & a_{3n}^{!!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{!!} & \dots & a_{nn}^{!!} \end{vmatrix}$$

- Az harmadik sort sort megszorozzuk $\frac{-a_{43}^{!!}}{a_{33}^{!!}}$ -vel majd hozzáadjuk a negyedik sorhoz. Az negyedik sor harmadik eleme így 0.
- …
- Az n-1-dik sort sort megszorozzuk $\frac{-a_{n(n-1)}^{!!!\dots!}}{a_{(n-1)(n-1)}^{!!!\dots!}}$ -vel majd hozzáadjuk az n. sorhoz. Az n. sor n-1-dik eleme így 0.

Így előállítottunk egy olyan mátrixot, amelyiknek a főátlója alatt csak 0-k állnak, alkalmazható az 5. szabály.

Aldetermináns: az a_{ij} elem sorának és oszlopának letakarásával kapott maradékmátrix determinánsát hívjuk az a_{ij} elemhez tartozó aldeterminánsnak.

Algebrai aldetermináns: az a_{ij} elemhez tarozó aldeterminánst megszorozzuk az a_{ij} elemre vonatkozó sakktáblaszabállyal. (-1-el, ha i+j páratlan; +1-el, ha i+j páros). Jele: A_{ij}.

Mátrix aldetermináns mátrixa: Egy mátrix elemeinek helyére beírjuk az algebrai aldeterminánsok értékét.
Pl. 3x3-as mátrixra:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -15 \\ 2 & -8 & 6 \\ -13 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrix adjungált mátrixa: az aldeterminráns mátrix transzponáltja:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Mátrix inverzének kiszámítása: kiszámítjuk a mátrix adjungált mátrixát, majd elosztjuk a mátrix determinánsával.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{Adj(\mathbf{A})}{Det(\mathbf{A})}$$

Pl: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 - 4 \cdot (-10) + 5 \cdot (-15) = -20$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -15 \\ 2 & -8 & 6 \\ -13 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 15 & 10 & -15 \\ 2 & -8 & 6 \\ -13 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 15 & 2 & -13 \\ 10 & -8 & 2 \\ -15 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 15 & 2 & -13 \\ 10 & -8 & 2 \\ -15 & 6 & 1 \end{bmatrix}}{-20} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{20} & -\frac{1}{10} & \frac{13}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{8}{20} & -\frac{1}{10} \\ \frac{15}{20} & -\frac{6}{20} & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

Mátrix rangjának meghatározása:

- Ha a mátrix nem négyzetes (n x n-es), felbővítjük négyzetessé 0-k ból álló sorok vagy oszlopok hozzáadásával.
- Ha az n x n-es mátrix determinánsa 0, akkor veszzük az összes (n-1)x(n-1) –es részmátrixát, kiszámítjuk a determinánsokat, ha 0-tól különbözőt találunk leállunk. Ha egyik (n-1)x(n-1) részmátrixnak sem 0-tól különböző a determinánsa, akkor megvizsgáljuk az összes egyel kisebb (n-2)x(n-2)-es részmátrixot. A vizsgált részmátrix méretét addig csökkentjük, amíg az első 0-tól különböző determinánsot meg nem kapjuk. A mátrix rangja enek a részmátrixnak a mérete.

Téglalapmátrixok esetén egy gyors kiindulópont lehet, hogy az n x m-es mátrix rangja maximun akkora lehet mind az (n,m) számpárból a kisebb.

Pl.: Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 10 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.

Mivel a mátrix 3x4-es ezért a rangja maximun 3 lehet.

A 3x3-as részmátrixok determinánsai:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 10 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 8 & 10 & 6 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

A 2x2-es részmátrixok determinánsai:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -7$$ STOP.

A mátrix rangja 2, azaz két lineárisan független sora ill. oszlopa van. Ez könnyen ellenőrizhető, a 3. oszlop az első kett összegéből, a 4. a második és az első különbségéből állítható elő.