Lineáris egyenletrendszer: több ismeretlent tartalmazó, összetartozó egyenletek, melyekben az ismeretlenek első hatványon állnak, csak konstansokkal vannak szorozva.

Az **egyenletrendszer megoldásának** nevezzük a változók azon lehetséges összetartozó értékeit, amalyeket behelyettesítve az egyenletrendszer egyenleteibe, azonosságot kapunk. A megoldás lehet egy egyértelmű, végtelen sok, és nem létező.

Az **egyenletrendszer homogén**, ha az egyenletek jobb oldalán 0-k állnak. Ebben az esetben a **homgén egyenletrendszer triviális megoldásá**nak nevezzük a változók (x_1, x_2, x_3, …) = (0, 0, 0, …) értékét, mert ez a homogén egyenletrendszernek mindig megoldása lesz.

Egy **egyenletrendszer homogenizáltját** kapjunk, ha a jobb oldalon az eredmények helyére 0-kat írunk:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix}\begin{cases} 3x- & 4y & = & 2 \\ x+ & 2y & = & 5 \end{cases} \Rightarrow \quad \text{homogenizálás} \quad \Rightarrow \begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix}\begin{cases} 3x- & 4y & = & 0 \\ x+ & 2y & = & 0 \end{cases}$$

Pl. 1.:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix}\begin{cases} 3x- & 4y & = & 2 \\ x+ & 2y & = & 5 \end{cases} \Rightarrow \text{a II.-ból:} \quad x = 5-2y$$

Behelyettesítve I.-be: $3(5-2y)-4y=2 \quad \Rightarrow \quad 15-10y=2 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{13}{10}=1.3$

$x=5-2y=5-2\cdot\frac{13}{10}=\frac{24}{10}=2.4$

Helyettesítsük be az egyenletrendszerbe:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix}\begin{cases} 3\cdot 2.4- & 4\cdot 1.3 & = & 2 \\ 2.4+ & 2\cdot 1.3 & = & 5 \end{cases}$$ az (x,y) = (2.4, 1.3) számpár megoldás, továbbá mivel egy konkrét megoldást találtunk, **egy egyértelmű megoldás**.

Pl. 2:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \\ III.: \end{matrix}\begin{cases} x+ & 2y- & z & = & 0 \\ x- & y+ & 2z & = & 0 \\ 3x+ & y- & z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \text{a II.-ból:} \quad x = y-2z$$

Behelyettesítve I.-be: $(y-2z)+2y-z=0 \Rightarrow \quad 3y=3z \quad \Rightarrow \quad y=z$

Behelyettesítve III.-ba: $3(z-2z)+2z-z=0 \Rightarrow \quad -2z=0 \quad \Rightarrow \quad z=0$

$$\Rightarrow \qquad y = 0 \;\; \Rightarrow \qquad x = y - 2z = 0$$

Látható, hogy a fenti homogén egyenletnek csak a triviális megoldás az egyértelmű megoldása.

Pl. 3.:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix} \begin{cases} 2x + & 3y - & z & = & 5 \\ x + & 2y + & z & = & 1 \end{cases}$$ ⇒ a II.-ból: $x = 1 - 2y - z$

Behelyettesítve I.-be: $2(1 - 2y - z) + 3y - z = 5 \quad \Rightarrow$

$$2 - y - 3z = 5 \qquad \Rightarrow \qquad y = -3 - 3z$$
$$x = 1 - 2y - z = 1 - 2 \cdot (-3 - 3z) - z = 7 + 5z$$

Helyettesítsük be az egyenletrendszerbe:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix} \begin{cases} 2(7 + 5z) + & 3(-3 - 3z) - & z & = & 5 \\ 7 + 5z + & 2(-3 - 3z) + & z & = & 1 \end{cases}$$ az (x,y) = (7+5z, -3-3z) számpár

megoldás. Mivel egyel kevesebb egyenletünk volt ezért az egyik ismeretlent mint paramétert tartalmazza. Ez a paraméter azonban a (-∞,∞) inervallumon bármilyen értéket felvehet, az ahhoz az értékhez tartozó (x,y) számpár megoldás lesz.

A (-∞,∞) inervallumon z végtelen sok értéket felvehet, ezért ez **végtelen sok megoldás**, mivel egy szabadon választható paramétert tartalmaz, **egy szabadsági fokkal**.

PL 4.:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix} \begin{cases} 3x + & 2y - & z - & w & = & 2 \\ 2x + & y - & z + & w & = & 5 \end{cases}$$ ⇒ a II.-ból: $y = 5 - 2x + z - w$

Behelyettesítve I.-be: $3x + 2(5 - 2x + z - w) - z - w = 2 \quad \Rightarrow$

$$10 - x + z - 3w = 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 8 + z - 3w$$

$$y = 5 - 2x + z - w = 5 - 2(8 + z - 3w) + z - w = -11 - z + 5w$$

Helyettesítsük be az egyenletrendszerbe:

$$\begin{matrix} I.: \\ II.: \end{matrix} \begin{cases} 3(8 + z - 3w) + & 2(-11 - z + 5w) - & z - & w & = & 2 \\ 2(8 + z - 3w) + & (-11 - z + 5w) - & z + & w & = & 5 \end{cases}$$ az (x,y) = (8+z-3w, -11-z+5w)

számpár megoldás. Mivel kettővel kevesebb egyenletünk volt ezért két ismeretlent mint paramétert tartalmaz. Ezek a paraméterek azonban a (-∞,∞) inervallumon bármilyen értéket felvehetnek, az ahhoz az értékhez tartozó (x,y) számpár megoldás lesz.
A (-∞,∞) inervallumon z végtelen sok értéket felvehet, továbbá w is végtelen sok értéket felvehet, ezért ez is **végtelen sok megoldás**, mivel két szabadon választható paramétert tartalmaz, **kettő szabadsági fokkal**.

Pl. 5:

$$\begin{array}{r} I.: \\ II.: \\ III.: \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcl} x+ & 2y- & z & = & 0 \\ x- & y+ & 2z & = & 0 \\ 2x+ & y+ & z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{a II.-ból:} \quad x = y - 2z$$

Behelyettesítve I.-be: $(y-2z)+2y-z=0 \Rightarrow \quad 3y=3z \quad \Rightarrow \quad y=z$
Behelyettesítve III.-ba: $2(z-2z)+z+z=0 \Rightarrow \quad 0z=0$ azonosság, igaz minden z érték mellett, ha y = z és x = y - 2z = -z. végtelen sok megoldást kaptunk, egy szabadsági fokkal.
Magyarázat: a III. egyenlet az I. és a II. összegéből álítódott elő, *(azaz az egyenletrendszer lineárisan összefüggő*) a III. egyenlet nem ad új információt, így eggyel kevesebb egyenletünk van, mint ismeretlenünk.
Megfigyelhető, hogy a fenti homogén egyenletrendszer végtelen sok megoldása tartalmazza a triviális megoldást is, hiszen z felveheti a 0 értéket is, ekkor x = y= 0.

Pl. 6:

$$\begin{array}{r} I.: \\ II.: \\ II.: \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x- & y & +z & = & 1 \\ x+ & 2y- & 2z & = & 2 \\ 5x+ & 3y- & 3z & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow \text{a II.-ból:} \quad x = 2+2z-2y$$

Behelyettesítve I.-be: $3(2+2z-2y)-y+z=1 \quad \Rightarrow \quad 6+7z-7y=1 \Rightarrow y=\frac{5+7z}{7}$

Behelyettesítve III.-ba: $5\left(2+2z-2\frac{5+7z}{7}\right)+3\frac{5+7z}{7}-3z=4$

$$10+10z-\frac{50}{7}-10z+\frac{15}{7}+3z-3z=4$$

$5+0z=4$ ellentmondás.

Ilyenkor az egyenletrendszernek **nincs megoldása**. Ennek oka, hogy az egyeletrendszer egyenletei között ellentmondás van, pl esetünkben a III. egyenlet bal oldala a II. egyenlet bal oldalának 2-szerese és az I. egyenlet bal oldalának összegéből kapható meg, (*a III. egyenlet bal oldala az I. és a II. egynelet bal oldalainak lineáris kombinációja*) de a jobb oldalak között ez nem áll fenn ($1+2\cdot 2=5\neq 4$).

Az egyenletrendszer homogenizáltja lineárisan összefüggő (mert a jobb oldalán csupa 0 áll, ezért a teljes III. egyenlet előállítható az I. és II.-ből), de maga az egyenetrendszer lineárisan független, ez okozza az ellentmondást.
Ha nem lenne belső ellentmodás (*pl a III. egyenlet így nézne ki*: $5x+3y-3z=5$) akkor az egyik egyenlet felesleges lenne, mert nem ad új információt (a III. egyenlet az I. és a II. egynelet lineáris kombinációja lene), a 2.- 3. példában látott módon végtelen sok megoldást kapnánk

Összefoglalva **egy egyértelmű megoldás**t akkor kapunk, ha pont annyi bal oldalán lineárisan független egyenletünk (*azaz ezeknek az egyenletek a homogenizáltja is lineárisan független*) van, mint amennyi ismertelenünk, a fennmaradó egyneletek pedig ezeknek lineáris kombinációi (*mind a jobb, mind a bal oldalon; ekkor nem kapunk belső ellentmondást*).

Végtelen sok megoldást kapunk, n szabadsági fokkal, ha n-el kevesebb bal oldalán lineárisan független egyenletünk (*lásd fenn*) van, mint amennyi ismertelenünk, a fennmaradó egyneletek pedig ezeknek lineáris kombinációi (*mind a jobb, mind a bal oldalon; ekkor nem kapunk belső ellentmondást*).
Nincs megoldása az egyenletrendszernek, ha az egyenletrendszer homogenizáltja lineárisan összfüggő, de az egyenletrendszer nem az.

A fenti csoportosításhoz az egyenletrendszer mátrixalakjánál láthatunk majd módszert.

Lényeges még,hogy ha az egyenletrendszer egy egyenletét konstanssal szorozzuk, illetve ha két egyenletet összeadunk vagy felcserélünk, az egyenletrendszer megoldása nem változik:

$$\begin{array}{rrcr} 3x- & 4y & = & 2 \\ x+ & 2y & = & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} 3x- & 4y & = & 2 \\ 2x+ & 4y & = & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} x+ & 2y & = & 5 \\ 3x- & 4y & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} 4x- & 2y & = & 7 \\ 3x- & 4y & = & 2 \end{array} \text{(I.=I.+II.)}$$

(x,y)=(2.4, 1.3) (x,y)=(2.4, 1.3) (x,y)=(2.4, 1.3) (x,y)=(2.4, 1.3)

Az egyenletrendszerek megoldásához alapvetően három módszert használunk, a Gauss módszert és az iverzmátrixos módszert és a Cramer szabályt.
Mindegyik módszer első lépése, hogy az egyenleteket úgy rendezi át, hogy azonos változók kerüljenek egy oszlopba:

$$\begin{array}{rrrcr} 3x- & 2y+ & 5z & = & 2 \\ -2z+ & 3y- & 4x & = & 1 \\ y+ & 2z- & x & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrcr} 3x- & 2y+ & 5z & = & 2 \\ -4x+ & 3y- & 2z & = & 1 \\ -x+ & y+ & 2z & = & 3 \end{array}$$

Gauss módszer

A Gauss módszer lényege, hogy az egyes egyenletekhez hozzáadjuk egymás után a többi egyenlet konstanszorosát úgy, hogy végül a főátlón kívül csak 0 elemek álljanak. Az 1. egyenlettel a többi (2, 3 …) egyenelet 1. elemét, a 2. egyenlettel a többi (1, 3, 4, …) egyenlet 2. elemét, a 3. egyenlettel a többi (1, 2, 4, …) egyenlet 3. elemét, az n. egyenlettel a többi (1, 2, 3, …n-1, n+1, …) egyenlet n. elemét lehet kinullázni. Engedélyezett továbbá az egyenletek felcserélése is. Példán keresztül lehet a legjobban bemutatni:

Oldjuk meg pl a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{r} I.: \\ II.: \\ III.: \end{array} \begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & & +3x_3 & = & 2 \\ 9x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Először nullázzuk a II. egyenlet 1. elemét az I. egyenlet konstansszorosának kivonásával!

Kiindulás:

$$\begin{array}{rccccccc} (II.) & & 5x_1 & +0 & +3x_3 & = & 2 \\ -c\cdot(I.) & -c\cdot(& 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1) \\ \hline & & 0 & ? & ? & = & ? \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 5x_1 - c\cdot 3x_1 = 0 \\ 5x_1 = c\cdot 3x_1 \\ c = \frac{5}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 5x_1 & +0 & +3x_3 & = & 2 \\ -\frac{5}{3}\cdot(& 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1) \\ \hline & 0 & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

Nullázzuk a III. egyenlet 1. elemét az I. egyenlet konstansszorosának kivonásával!

Kiindulás:

$$\begin{array}{rccccccc} (III.) & & 9x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ -c\cdot(I.) & -c\cdot(& 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1) \\ \hline & & 0 & ? & ? & = & ? \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 9x_1 - c\cdot 3x_1 = 0 \\ 9x_1 = c\cdot 3x_1 \\ c = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 9x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 3 \\ -3\cdot(& 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1) \\ \hline & 0 & -2x_2 & +0 & = & 0 \end{array}$$

Az egyenletrendszer most:

$$\begin{array}{r} I.: \\ II.: \\ III.: \end{array} \begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & \frac{1}{3} \\ & -2x_2 & & = & 0 \end{cases}$$

Nullázzuk a III. egyenlet 2. elemét az II. egyenlet konstansszorosának kivonásával!

Kiindulás:

$$\begin{array}{rcccccl} & 0 & -2x_2 & +0 & = & 0 & (III.) \\ -c\cdot(& 0 & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & \frac{1}{3}) & (II.) \\ \hline & ? & 0 & ? & = & ? & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -2x_2 - c\cdot\frac{-10}{3}x_2 = 0 \\ -2x_2 = c\cdot\frac{-10}{3}x_2 \\ c = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 0 & -2x_2 & +0 & = & 0 \\ -\frac{3}{5}\cdot(& 0 & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & \frac{1}{3}) \\ \hline & & 0 & -\frac{4}{5}x_3 & = & -\frac{1}{5} \end{array}$$

Az egyenletrendszer most:

$$\begin{array}{r} I.: \\ II.: \\ III.: \end{array}\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & \frac{1}{3} \\ & & -\frac{4}{5}x_3 & = & -\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

Nullázzuk a II. egyenlet 3. elemét a III. egyenlet konstansszorosának kivonásával!
Kiindulás:

$$\begin{array}{rrcccccc} (II.) & & 0 & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & \frac{1}{3} \\ -c\cdot(III.) & -c\cdot(& 0 & 0 & -\frac{4}{5}x_3 & = & -\frac{1}{5}) \\ \hline & & ? & ? & 0 & = & ? \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \frac{4}{3}x_3 - c\cdot\frac{-4}{5}x_3 = 0 \\ \frac{4}{3}x_3 = c\cdot\frac{-4}{5}x_3 \\ c = -\frac{5}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 0 & -\frac{10}{3}x_2 & +\frac{4}{3}x_3 & = & \frac{1}{3} \\ -\frac{-5}{3}\cdot(& 0 & 0 & -\frac{4}{5}x_3 & = & -\frac{1}{5}) \\ \hline & & -\frac{10}{3}x_2 & 0 & = & 0 \end{array}$$

Nullázzuk a I. egyenlet 3. elemét a III. egyenlet konstansszorosának kivonásával!
Kiindulás:

$$\begin{array}{rrcccccc} (I.) & & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -c\cdot(III.) & -c\cdot(& 0 & 0 & -\frac{4}{5}x_3 & = & -\frac{1}{5}) \\ \hline & & ? & ? & 0 & = & ? \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x_3 - c\cdot\frac{-4}{5}x_3 = 0 \\ x_3 = c\cdot\frac{-4}{5}x_3 \\ c = -\frac{5}{4} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ -\frac{-5}{4}\cdot(& 0 & 0 & -\frac{4}{5}x_3 & = & -\frac{1}{5}) \\ \hline & 3x_1 & +2x_2 & 0 & = & \frac{3}{4} \end{array}$$

Az egyenletrendszer most:

$$\begin{array}{l} I.: \\ II.: \\ III.: \end{array} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = \frac{3}{4} \\ -\frac{10}{3}x_2 = 0 \\ -\frac{4}{5}x_3 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Nullázzuk az I. egyenlet 2. elemét a II. egyenlet konstansszorosának kivonásával!
Kiindulás:

$$\begin{array}{rrrrrr} (I.) & 3x_1 & +2x_2 & +0 & = & \frac{3}{4} \\ -c\cdot(II.) & -c\cdot(\;0 & -\frac{10}{3}x_2 & +0 & = & 0) \\ \hline & ? & 0 & ? & = & ? \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_2 - c\cdot\frac{-10}{3}x_2 = 0 \\ 2x_2 = c\cdot\frac{-10}{3}x_2 \\ c = -\frac{6}{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 3x_1 & +2x_2 & +0 & = & \frac{3}{4} \\ -\frac{-6}{10}\cdot(\;0 & -\frac{10}{3}x_2 & +0 & = & 0) \\ \hline 3x_1 & +0 & +0 & = & \frac{3}{4} \end{array}$$

Az egyenletrendszer most:

$$\begin{array}{l} I.: \\ II.: \\ III.: \end{array} \begin{cases} 3x_1 = \frac{3}{4} \\ -\frac{10}{3}x_2 = 0 \\ -\frac{4}{5}x_3 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Ebből már meghatározható a megoldás: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

Ha a 3. lépésnél, amikor a 3. egyenletre kijött a $0 - 2x_2 + 0 = 0$ eredmény, észrevesszük, hogy a 3. sort felcserélve a 2. sorral az az általunk kívánt formában lesz, jópár számitást megspórolhattunk volna, most csak azért nem tettük meg, hogy a Gauss módszert szemléletesebben lehessen bemutatni.

Egyenletrendszer mátrixalakja

Az egyenletrendszert mátrixalakba hozható, ha az oszlopaiban egymás alatt azonos ismeretlenek állnak. Ha nem így van, rendezzük át az egyenletet.
Ezután az egyenletrendszer felírható **A** **x** = **b** alakban, ahol az **A** mátrix elemei az egyenletrendszer konstansai a látható elrendezésben, az **x** oszlopvektor az egyenletrendszer ismeretlenjei balról jobbra leolvasási sorrendben, a **b** oszlopvektor az egyenletrendszer jobb oldalán álló konstansok. Pl:

$$\begin{array}{r} I.: \\ II.: \\ III.: \end{array}\left\{\begin{array}{llll} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 1 \\ 5x_1 & & +3x_3 & = 2 \\ 9x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = 3 \end{array}\right. \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

A mátrixszorzás szabályát alkalmazva visszaszorozva az eredeti egyenletrendszert kapjuk.

Az egyenletrendszer bővített mátrixának nevezzük azt a mátrixot, amelyben az **A** mátrix oszlopai mellé felvesszük az eredmények oszlopát:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 3 \\ & \mathbf{A} & & \mathbf{b} \end{array}\right]$$

Ennek a mátrixnak segítségével lehet meghatározni az egyenletrendszer megoldásainak jellegét.
Ha pl. az **A** mátrix rangja kisebb mint a bővített mátrix rangja (*a bővített mátrix lineárisan független sorainak száma nagyobb mint az* ***A*** *mátrixnak, azaz az egyenletrendszer bal oldalán van legalább egy egyenlet, amelyik a többi lineáris kombinációjából előállítható, de a jobb oldalra ez nem igaz*) akkor az egyenletrendszerben ellentmodás van (lásd 6. példa)

Az egyenletrendszernek akkor van egy egyértelmű megoldása, ha az **A** mátrix rangja megegyezik az ismertetlenek számával és a bővített mátrix rangjával.

Az egyenletrendszernek n szabadságfokú végtelen sok megoldása van, ha az **A** mátrix rangja megegyezik a bővített mátrix rangjával, de n-el kisebb az ismeretlenek számánál.

Mátrixrang számítás a Mátrixok-Determináns fejezetben található meg.

Egyenletrerndszer megoldása inverzmátrix segítségével

Szorozzuk be az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ mátrixegyenlet mindkét oldalát bal oldalról a mátrix inverzével ($\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$-vel):

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\ \underline{\mathbf{b}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\ \underline{\mathbf{b}}$$

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\ \underline{\mathbf{b}}$$

Az inverz csak akkor létezik, ha az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix determinánsa nem 0 (*a homogenizált egyenletrendszer lineárisan független*), ezért legelőször ezt célszerű kiszámítani. Ezzel a módszerrel ezért vagy egyértelmű megoldást kaphatunk, a végtelen sok megoldás van vagy nincs megoldás ennél a módszernél nem különül el, ekkor nincs megoldás.

A fenti példánál:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) = 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 20 \\ -2 & 0 & 6 \\ 6 & -4 & -10 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -12 & -2 & 6 \\ 12 & 0 & -4 \\ 20 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} -12 & -2 & 6 \\ 12 & 0 & -4 \\ 20 & 6 & -10 \end{bmatrix}}{8} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{6}{8} \\ \frac{12}{8} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{20}{8} & \frac{6}{8} & -\frac{10}{8} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{6}{8} \\ \frac{12}{8} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{20}{8} & \frac{6}{8} & -\frac{10}{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot\frac{-12}{8} + 2\cdot\frac{-1}{4} + 3\cdot\frac{6}{8} \\ 1\cdot\frac{12}{8} + 2\cdot 0 + 3\cdot\frac{-1}{2} \\ 1\cdot\frac{20}{8} + 2\cdot\frac{6}{8} + 3\cdot\frac{-10}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

Egyenletrendszer megoldása Cramer szabállyal

A Cramer szabály szerint az egyes változókat megkaphatjuk az $x_i = \dfrac{D_i}{\det(\mathbf{A})}$ szabály segítségével, ahol x_i az i. változó (az **x** oszlopvektor i. eleme), D_i az ún módosított determináns, amit úgy kapunk meg, hogy az **A** mátrix i. oszlopába beírjuk a **b** eredményvektort.
Mivel a nevezőben az **A** mátrix determinánsa áll, csak akkor tudjuk ezzel a módszerrel megoldani, ha az **A** mátrix determinánsa nem 0 (*a homogenizált egyenletrendszer lineárisan független*), ezért legelőször ezt célszerű kiszámítani. Ezzel a módszerrel is ezért vagy egyértelmű megoldást kaphatunk, a végtelen sok megoldás van vagy nincs megoldás ennél a módszernél sem különül el, ekkor nincs megoldás.

Ismét a fenti példánál: $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$

$$\det(\mathbf{A}) = 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \cdot \left(1\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \cdot \left(3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \cdot \left(3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$