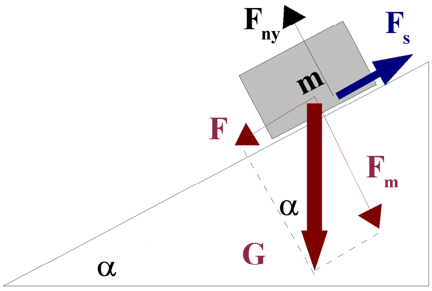
Egy m = 2kg tömegű ládát egy l = 2m hosszú deszka végére helyezünk.

1. Hogyan határozhatjuk meg a súrlódási tényezőt egy szögmérő segítségével?
2. Ha a deszkát α = 30°-ban megdöntjük, és a ládát meglökjük, egyenletes sebességggel csúszni kezd. Mekkora a súrlódási tényező?
3. A deszkát α = 45°-ban megdöntjük. Mekkora a láda gyorsulása, mekkora a végsebessége; mennyi munkát végez a gravitációs mező, mennyi hőt termel a súrlódási erő?



1. A deszkát lassan bedöntjük addig a szögig, ahol a láda a megcsúszás határhelyzetébe kerül (azaz egy kicsit megpöccintve már megindul és egyenletes sebességgel lecsúszik.) Ebben az esetben a gyorsulása 0, így rá ható erők eredője 0, ebből kiszámítható a súrlódási erő.

   A ládára három külső erő hat: a **G** gravitációs erő, az $\mathbf{F_{ny}}$ lejtő által kifejtet felöletre merőleges nyomóerő és az $\mathbf{F_s}$ súrlódási erő. A gravitációs erő felbontható lejtőirányú (**F**) és lejtőre merőleges ($\mathbf{F_m}$) komponensekre.

   Az egyes komponensek:

   $$F = G \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \qquad F_{ny} = G \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

   A lejtőre merőleges irányú erők eredője (a lejtőre merőleges irányban a láda nem mozdul el, ebben az irányban a gyorsulása 0):

   $$F_{e\,meroleges} = m \cdot a_{meroleges} = 0 = F_{ny} - F_m$$

   $$F_{ny} = -F_m$$

   A felületeket összenyomó erőpár az $\mathbf{F_m}$, $\mathbf{F_{ny}}$ erőpár, így a súrlódási erő:

   $$F_s = F_m \cdot \mu = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu$$

   A lejtő irányú erők eredője:

   $$F_{e\,lejto} = m \cdot a_{lejto} = F - F_s = m \cdot g \sin(\alpha) - m \cdot g \cos(\alpha) \cdot \mu$$

   Mivel a lejtőt csk annyira döntöttk meg, hogy a láda a megcsúszás határhelyzetébe kerüljön, a láda lejtőirányú gyorsulása 0.

   $$m \cdot a_{lejto} = 0 = m \cdot g \sin(\alpha) - m \cdot g \cos(\alpha) \cdot \mu$$

   $$m \cdot g \sin(\alpha) = m \cdot g \cos(\alpha) \cdot \mu$$

   $$\sin(\alpha) = \cos(\alpha) \cdot \mu \quad \Rightarrow \qquad \mu = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

2. Ugyanaz a kérdés mint az 1.-ben csak számszerűsítve:

   $$\mu = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) = \tan(30^o) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$$

3. α = 45°, mint az 1.-ben, csak a lejtőirányú eredő erő nem 0:

$$F = G \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \qquad F_{ny} = G \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

$$F_s = F_m \cdot \mu = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu = 2 \cdot 10 \cdot \cos(45^o) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 8.165\,N$$

A lejtő irányú erők eredője:

$$F_{e\,lejto} = m \cdot a_{lejto} = F - F_s = m \cdot g \sin(\alpha) - m \cdot g \cos(\alpha) \cdot \mu$$

$$m \cdot a_{lejto} = m \cdot g \sin(\alpha) - m \cdot g \cos(\alpha) \cdot \mu$$

$$a_{lejto} = g \sin(\alpha) - g \cos(\alpha) \cdot \mu = 10 \cdot \sin(45^o) - 10 \cdot \cos(45^o) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 3\,\frac{m}{s^2}$$

A végsebesség kiszámításához két egyenletet kel felírnunk:

A gyorsuló mozgással megtett út: $s = v_{kezd} \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot (\Delta t)^2$

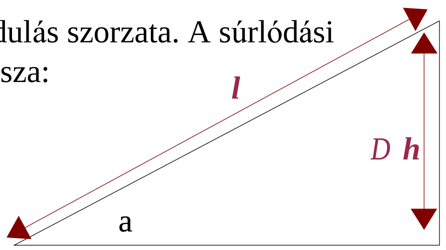
A gyorsulás: $a = \frac{v_{veg} - v_{kezd}}{\Delta t} \rightarrow v_{veg} = a \cdot \Delta t + v_{kezd}$

Tudjuk, hogy a kezdősebesség v_{kezd} = 0, továbbá *s* = *l*.

$$l = \frac{a_{lejto}}{2} \cdot (\Delta t)^2 \rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a_{lejto}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{3}} \approx 1.155s$$

$$v_{veg} = a \cdot \Delta t = 3 \cdot 1.155 \approx 3{,}465\,\frac{m}{s}$$

Egy erő munkája az erő és az erő irányában végzett elmozdulás szorzata. A súrlódási erő által termelt hő = súrlódási erő munkája = F_s · lejő_hossza:



$$W_s = F_s \cdot l = 8.165 \cdot 2 = 16.33J$$

A gravitációs erő munkája =
a gravitációs erő · függőleges elmozdulás:

$$W_g = G \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 28.28J$$

A végsebesség a munkák alapján is számítható, ugyanis a gravitációs erő munkája fedezi a láda mozgási energiáját és a súrlódási erő által végzett munkát:

$$W_g = W_s + E_{kin} \quad \text{továbbá} \quad E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{a lejtő alján:}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (v_{veg})^2 = W_g - W_s = 28.28 - 16.33 = 11.95\,J$$

$$v_{veg} = \sqrt{\frac{2 \cdot (W_g - W_s)}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11.95}{2}} \approx 3.457\,\frac{m}{s}$$

A kétféle módon kapott végsebesség minimálisan eltér a kerekítési hibák miatt.