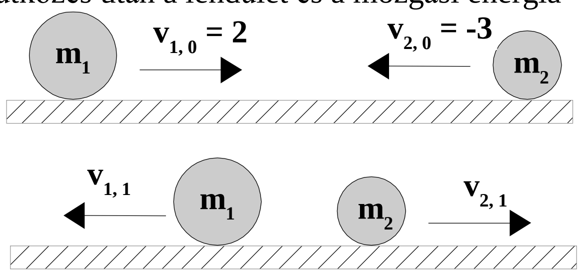
Két golyó centrálisan ütközik . Az egyik tömege m_1 = 6kg sebessége $v_{1,0}$ = 2 m/s;a másik tömege m_2 = 3kg sebessége $v_{2,0}$ = -3 m/s. Mekkora lesz a sebességük ütközés után, ha

1. az ütközés tökéletesen rugalmas
2. az ütközés tökéletesen rugalmatlan
3. az ütközés során z energia 20%-a hővé alakul

Az ütközés előtti lendület:

$$I_{\text{ütközés el?tt}}=m_1\cdot v_{1,0}+m_2\cdot v_{2,0}=6\cdot 2+3\cdot(-3)=3\frac{kg\cdot m}{s}$$

1. Ha az ütközés tökéletesen rugalmas, akkor az ütközés után a lendület és a mozgási energia megmaradnak:



$$I_{\text{ütközés után}}=m_1\cdot v_{1,1}+m_2\cdot v_{2,1}$$

$$I_{\text{ütközés el?tt}}=I_{\text{ütközés után}}=3=m_1\cdot v_{1,1}+m_2\cdot v_{2,1}$$

$$v_{2,1}=\frac{3-m_1\cdot v_{1,1}}{m_2}=\frac{3-6\cdot v_{1,1}}{3}=1-2\cdot v_{1,1}$$

$$E_{\text{kin, ütk?zés el?tt}}=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(v_{1,0})^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot(v_{2,0})^2=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(-3)^2=25.5\,J$$

$$E_{\text{kin, ütközés után}}=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(v_{1,1})^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot(v_{2,1})^2$$

$$E_{\text{kin, ütközés el?tt}}=E_{\text{kin, ütközés után}}=25{,}5=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(v_{1,1})^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot(v_{2,1})^2$$

A lendületmegmaradásból kijött összefüggést behelyettesítve:

$$25{,}5=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(v_{1,1})^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot(1-2\cdot v_{1,1})^2$$

$$51=m_1\cdot(v_{1,1})^2+m_2\cdot(1-2\cdot v_{1,1})^2$$

$$51=6\cdot(v_{1,1})^2+3\cdot(1-2\cdot v_{1,1})^2=6\cdot(v_{1,1})^2+3\cdot(1-4\cdot v_{1,1}+4\cdot(v_{1,1})^2)$$

$$51=6\cdot(v_{1,1})^2+3-12\cdot v_{1,1}+12\cdot(v_{1,1})^2=18\cdot(v_{1,1})^2-12\cdot v_{1,1}+3$$

$$0=18\cdot(v_{1,1})^2-12\cdot v_{1,1}-48$$

$$0=3\cdot(v_{1,1})^2-2\cdot v_{1,1}-8=a\cdot(v_{1,1})^2+b\cdot v_{1,1}+c$$

$$(v_{1,1})_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3}=\left\{\begin{matrix}2\\ \frac{-8}{6}\approx -1.333\end{matrix}\right\}$$

Az egyik eredmény a $v_{1,0}$ sebesség, ha a két eredmény közül ezt választanánk, akkor a $v_{2,0}$ sebességre olyan érték jönne ki, mintha az ütközés meg sem történt volna, mintha a két golyó átment volna egymáson.

A másik eredménnyel ($v_{1,1}$ = -1.333m/s):

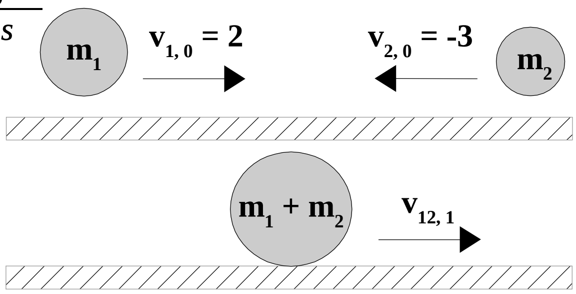
$$v_{2,1}=1-2\cdot v_{1,1}=1-2\cdot(-\frac{8}{6})=1+\frac{16}{6}=\frac{22}{6}\approx 3.666\frac{m}{s}$$

Ellenőrzésképpen:

$$E_{\text{kin, ütközés után}}=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(v_{1,1})^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot(v_{2,1})^2=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\left(-\frac{8}{6}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left(\frac{22}{6}\right)^2=25.5\,J$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com

2. Tökéletesen rugalmatlan az ütközés, ha a golyók az ütközés után összetapadnak, azaz a sebességük is egy közös v_{12} sebesség lesz. Ebben az esetben csak a lendület marad meg.



$$I_{\text{ütközés el?tt}} = m_1 \cdot v_{1,0} + m_2 \cdot v_{2,0} = 6 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 3 \frac{kg \cdot m}{s}$$

$$I_{\text{ütközés után}} = (m_1 + m_2) \cdot v_{12,1} = (6+3) \cdot v_{12,1}$$

$$I_{\text{ütközés el?tt}} = I_{\text{ütközés után}} = 3 = (6+3) \cdot v_{12,1}$$

$$v_{12,1} = \frac{3}{6+3} = \frac{1}{3} \frac{m}{s}$$

3. Ez esetben ugyanúgy kell számolni, mint az 1.-nél, csak ütközés után lesz egy höenergia tag is:

$$E_{kin,\text{ ütközés el?tt}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_{1,0})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_{2,0})^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-3)^2 = 25.5\, J$$

$$E_{kin,\text{ ütközés után}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_{1,1})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_{2,1})^2$$

$$E_{kin,\text{ ütközés el?tt}} = E_{kin,\text{ ütközés után}} + W_{h?} = E_{kin,\text{ ütközés után}} + 0.2 \cdot E_{kin,\text{ ütközés el?tt}}$$

$$E_{kin,\text{ ütközés után}} = 0.8 \cdot E_{kin,\text{ ütközés el?tt}} = 0.8 \cdot 25{,}5 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_{1,1})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_{2,1})^2$$

A lendületmegmaradásból az 1.-nél kijött összefüggést behelyettesítve:

$$0.8 \cdot 25{,}5 = 20.4 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_{1,1})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (1 - 2 \cdot v_{1,1})^2$$

$$40.8 = m_1 \cdot (v_{1,1})^2 + m_2 \cdot (1 - 2 \cdot v_{1,1})^2$$

$$40.8 = 6 \cdot (v_{1,1})^2 + 3 \cdot (1 - 2 \cdot v_{1,1})^2 = 6 \cdot (v_{1,1})^2 + 3 \cdot (1 - 4 \cdot v_{1,1} + 4 \cdot (v_{1,1})^2)$$

$$40.8 = 6 \cdot (v_{1,1})^2 + 3 - 12 \cdot v_{1,1} + 12 \cdot (v_{1,1})^2 = 18 \cdot (v_{1,1})^2 - 12 \cdot v_{1,1} + 3$$

$$0 = 18 \cdot (v_{1,1})^2 - 12 \cdot v_{1,1} - 37.8$$

$$0 = 3 \cdot (v_{1,1})^2 - 2 \cdot v_{1,1} - 6.3 = a \cdot (v_{1,1})^2 + b \cdot v_{1,1} + c$$

$$(v_{1,1})_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6.3)}}{2 \cdot 3} = \left\{ \begin{matrix} \frac{2 + \sqrt{79.6}}{6} \approx 1.82 \\ \frac{2 - \sqrt{79.6}}{6} \approx -1.154 \end{matrix} \right\}$$

Az egyik eredménnyel ($v_{1,1}$ = 1.82m/s):

$$v_{2,1} = 1 - 2 \cdot v_{1,1} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{79.6}}{6} \right) \approx -2.64 \frac{m}{s}$$

Ha ezt az eredményt választanánk, akkor amelyik sebessége negatív volt – negatív lesz, pozitív volt – pozitív lesz; mintha a golyók egyike sem váltana irányt, hanem egymáson átmennének, ami lehetetlen.

A másik eredménnyel ($v_{1,1}$ = -1.154m/s):

$$v_{2,1} = 1 - 2 \cdot v_{1,1} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{79.6}}{6} \right) \approx 3.31 \frac{m}{s}$$

Ellenőrzésképpen:

$$E_{kin,\text{ ütközés után}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_{1,1})^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_{2,1})^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (-1{,}154)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3.31)^2 \approx 20.4 = 0.8 \cdot 25.5\, J$$

PDF created with FinePrint pdfFactory trial version http://www.fineprint.com