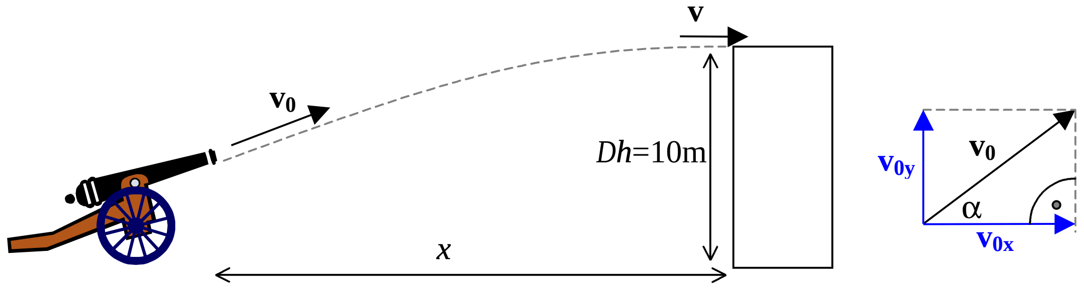
Ostromolják a várat, az ágyú súlya 650 kg. Az ágyúgolyó 65 kg. A várfalon 10 m magasan van egy lőrés az ágyúgolyó vízszintesen talál a lőrésbe.

1. Milyen szögbe kell állítani az ágyút? (a)
2. Mekkora az ágyúgolyó kezdeti sebessége? (v_0)
3. Milyen messze kell állítani az ágyút? (x)
4. A súrlódási tényező m = 0.8. Mennyit megy hátra az ágyú? Mekkora az ágyú sebessége?



Bontsuk fel az ágyúgolyó sebességét függőleges és vízszintes komponensekre. A golyó vízszintesen x = 100m-t halad egyenes vonalú egyenletes mozgással (vízszintes irányban nem gyorsítja semmi), függőlegesen 10m-t halad egyenes vonalú egyenletesen változó mozgással (gyorsulása $-g \approx -10 m/s^2$).
A teljes röppályán *Dt* idő alatt halad végig.

Ha a lőrésbe vízszintesen talál, akkor a pálya végpontján a pillanatnyi sebességvektorának (**v**) függőleges komponense (v_y) éppen 0. A függőleges sebességváltozás felírható a gyorsulással:

$$\frac{v_y - v_{0y}}{\Delta t} = a = -g \Rightarrow \Delta t = \frac{v_y - v_{0y}}{-g} = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{v_{0y}}{g}$$

Másrészt a függőleges irányban megtett út 10m. A *Dt* ideig tartó egyenletesen gyorsuló mozgás során megtett út képlete: $\Delta s = v_{kezdő} \cdot \Delta t + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2$. Behelyettesítve:

$$\Delta h = v_{0y} \cdot \Delta t - \frac{g}{2} \cdot \Delta t^2 = v_{0y} \cdot \frac{v_{0y}}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$v_{0y} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10} = 10 \cdot \sqrt{2} \approx 14.1 \frac{m}{s}$$

Bármilyen *x* távolságból is lőjük ki a golyót, a függőleges sebességkomponensnek 14.1 m/s –nek kell lennie (*mert minden esetben azonos magasságig kell feljutnia*).

Az első három kérdezett adat közül egyet meg kell adni, hogy a példa megoldható legyen.

a. Legyen pl megadva az ágyú távolsága x = 100m.
   Vízszintes irányban *Dt* ideig halad, ez alatt kell megtennie az x távolságot egyenletes sebességgel. Ebből a v_{0x} sebesség:

$$x = v_{0x} \cdot \Delta t \Rightarrow v_{0x} = \frac{x}{\Delta t} = \frac{x}{\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)} = \frac{x \cdot g}{v_{0y}} = \frac{100 \cdot 10}{10 \cdot \sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} 100 = 50\sqrt{2} = 70.71 \frac{m}{s}$$

   Ebből a kezdősebesség:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{\left(10 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left(50 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{5200} = 10\sqrt{52} \approx 72.11 \frac{m}{s}$$

   A lövés szöge:

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \Rightarrow a = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{10\sqrt{2}}{50\sqrt{2}}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) \approx 11.31°$$

b. Legyen megadva a kezdősebesség v_0 = 100m/s

A függőleges sebességkomponenst már ismerjük. Ennek segötségével:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \Rightarrow v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \Rightarrow v_{0x}^2 = v_0^2 - v_{0y}^2 \Rightarrow v_{0x} = \sqrt{v_0^2 - v_{0y}^2}$$

$$v_{0x} = \sqrt{100^2 - \left(10\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{9800} = 10\sqrt{98} \approx 99\frac{m}{s}$$

A lövés szöge:

$$\operatorname{tg} a = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \Rightarrow a = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{98}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{98}}\right) \approx 8.13°$$

A lövés távolsága:

$$x = v_{0x} \cdot \Delta t = v_{0x} \cdot \frac{v_{0y}}{g} = 10\sqrt{98} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{10} = 10\sqrt{98 \cdot 2} = 140m$$

c. Legyen megadva a lövés szöge: $\alpha = 30°$

A függőleges sebességkomponenst már ismerjük. Ennek segötségével:

$$\operatorname{tg} a = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \Rightarrow v_{0x} = \frac{v_{0y}}{\operatorname{tg} a} = \frac{10\sqrt{2}}{\operatorname{tg} 30°} = \frac{10\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 10\sqrt{3 \cdot 2} \approx 24.5\frac{m}{s}$$

Ebből a kezdősebesség:

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{\left(10 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left(10 \cdot \sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{800} = 10\sqrt{8} \approx 28.28\frac{m}{s}$$

A lövés távolsága:

$$x = v_{0x} \cdot \Delta t = v_{0x} \cdot \frac{v_{0y}}{g} = 10\sqrt{6} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{10} = 10\sqrt{12} = 34.64m$$

4. Lövés **közben** a golyót ferdén gyorsító erő függőleges komponensének ellenereje az ágyút a talajhoz nyomja, ami a súrlódást növeli; de lövés **után** a golyó és az ágyú nem hatnak egymásra, így ezt az erőt nem kell figyelembe venni a súrlódási erő számításakor.

Mivel az ágyú csak vízszintes irányban tud elmozdulni, csak a vízszintes sebességkomponensekre írjuk fel a lendületmegmaradást (*lövés előtt az ágyú+golyó közös sebességét tekintsük 0-nak.*):

$$I_{loves\_elott} = m_{agyu} \cdot v_{agyu1} + m_{golyo} \cdot v_{golyo1} = 650 \cdot 0 + 65 \cdot 0 = 0$$

A golyó sebességét az a. példa alapján vegyük $v_{golyo2} = 10\sqrt{2}$.

$$I_{loves\_utan} = m_{agyu} \cdot v_{agyu2} + m_{golyo} \cdot v_{golyo2} = 650 \cdot v_{agyu2} + 65 \cdot 10\sqrt{52}$$

$$I_{loves\_elott} = I_{loves\_utan} = 0 = 650 \cdot v_{agyu2} + 65 \cdot 10\sqrt{52} \Rightarrow v_{agyu2} = \frac{65 \cdot 10\sqrt{52}}{650} = \sqrt{52}\frac{m}{s}$$

A súrlódási erő:

$F_s = F_{Felületeket\_összenyomó} \cdot \mu$ esetünkben $F_s = G \cdot \mu = m_{agyu} \cdot g \cdot \mu = 650 \cdot 10 \cdot 0.8 = 5200N$

Mivel az ágyúra vözszintes irányban csak a súrlódás hat: $F_e = -F_s$. A gyorsulás:

$$F_e = m_{agyu} \cdot a = -F_s = -m_{agyu} \cdot g \cdot \mu \Rightarrow a = -g \cdot \mu = -8\frac{m}{s^2}$$

A csúszás $v_{ágyu3}$ = 0-ig tart. Időtartama:

$$a = \frac{v_{agyu3} - v_{agyu2}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_{agyu3} - v_{agyu2}}{a} = \frac{0 - \sqrt{52}}{-8} = \frac{\sqrt{52}}{8}$$

A megtett út:

$$s = v_{kezd} \cdot \Delta t + \frac{a}{2}\Delta t^2 = \sqrt{52} \cdot \frac{\sqrt{52}}{8} - \frac{8}{2}\left(\frac{\sqrt{52}}{8}\right)^2 = 3.25m$$