E.2.8.

Írjuk fel az E_5^3 és V_2^3 termeket és adjuk meg a formulát, mely közöttük kapcsolatot létesít.

$E_5^3 = X_3 \cdot \overline{X_2} \cdot X_1$ $\quad V_2^3 = \overline{X_3} \cdot X_{\cdot 2} \cdot \overline{X_1}$

$E_i^n = \overline{V^n_{2^n-1-i}} \Rightarrow E_5^5 = \overline{V^3_{2^3-1-5}} = \overline{V_2^3} = X_3 \cdot \overline{X_2} \cdot X_1 = \overline{\overline{X_3} + X_2 + \overline{X_1}}$

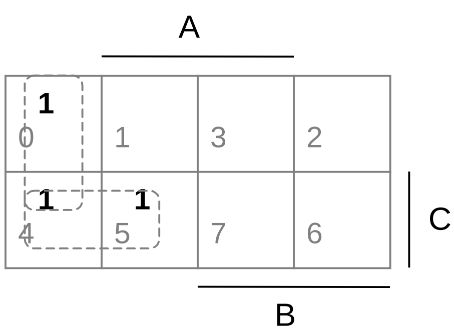
E.2.9.

Adjuk meg a maxterm ←→ minterm átalakítás lépéseit V-K táblákkal kapcsolatban, és mutassuk be az átalakítást egy felvett példán keresztül.

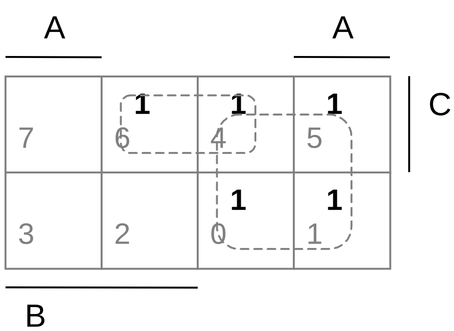
„n” változós függvényre:

1. a tábla bejegyzéseinek negálása (1→0, 0→1)
2. a tábla celláinak új sorszáma = 2^n-1-(régi sorszám)
3. a tábla peremezésén a változók negálása

pl.: $F^3(C,B,A) = \sum^3 (0,4,5)$



Minterm táblával:
$F^3 = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{B} \cdot C$



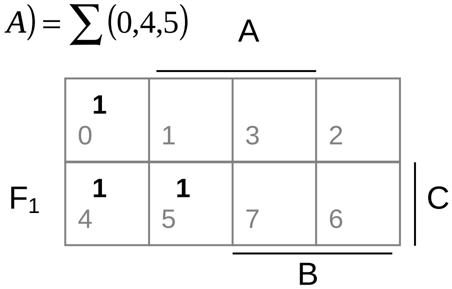
Maxterm táblával
$F^3 = \overline{B} \cdot \left(\overline{A} + C\right)$

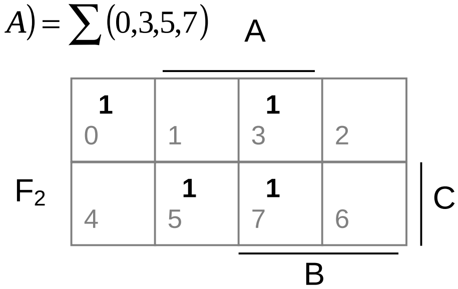
E.2.10.

Mutassuk be felvett példákon a logikai műveletek V-K táblák útján történő végrehajtását

Vegyünk fel két logikai függvényt, és vegyük fel a két függvény V-K tábláját:

$F_1^3(C,B,A) = \sum^3 (0,4,5)$ $\quad F_2^3(C,B,A) = \sum^3 (0,3,5,7)$





Állítsuk elő logikai függvényeket a két függvény közötti ÉS, VAGY, ANTIVALENCIA, EKVIVALENCIA, ÉS-NEM, VAGY-NEM kapcsolattal.

ÉS ($F_1 \cdot F_2$): a két V-K táblát egymásra helyezve, az eredményben azok a cellák lesznek ’1’-k amelyek mindkét táblán ’1’-k (*a többi ’0’ lesz*).

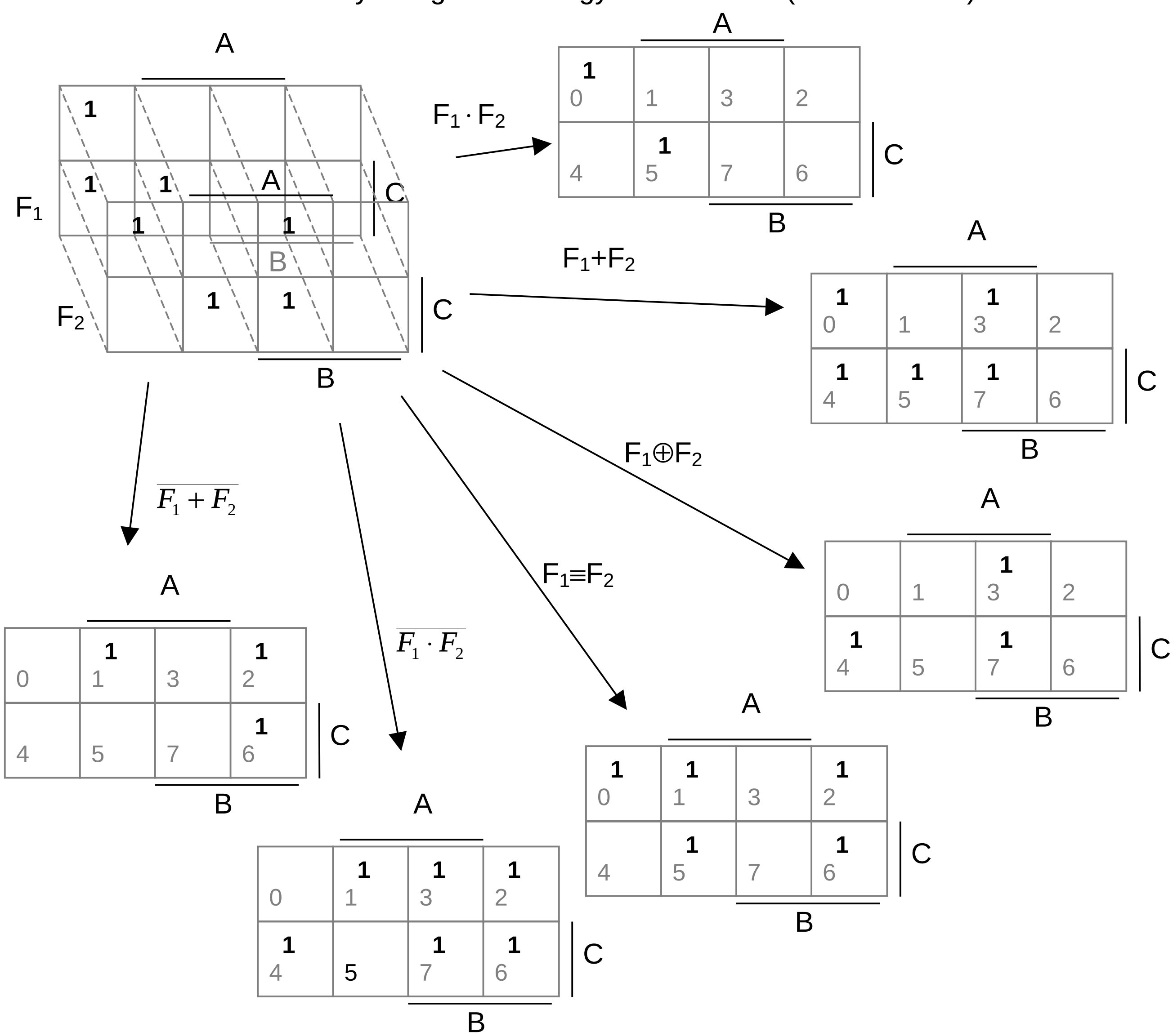
VAGY (F_1+F_2): két V-K táblát egymásra helyezve, az eredményben azok a cellák lesznek ’1’-k amelyek legalább az egyik táblán ’1’-k (*a többi ’0’ lesz*).

ANTIVALENCIA ($F_1 \oplus F_2$): két V-K táblát egymásra helyezve, az eredményben azok a cellák lesznek ’1’-k amelyek a két táblán különbözők (*a többi ’0’ lesz*).

EKVIVALENCIA ($F_1 \equiv F_2$): két V-K táblát egymásra helyezve, az eredményben azok a cellák lesznek ’1’-k amelyek a két táblán megegyeznek (*a többi ’0’ lesz*).

ÉS-NEM ($\overline{F_1 \cdot F_2}$): a két V-K táblát egymásra helyezve, az eredményben azok a cellák lesznek ’0’-k amelyek mindkét táblán ’1’-k (*a többi ’1’ lesz*).

VAGY-NEM ($\overline{F_1 + F_2}$): a két V-K táblát egymásra helyezve, az eredményben azok a cellák lesznek ’0’-k amelyek legalább az egyik táblán ’1’-k (*a többi ’1’ lesz*).

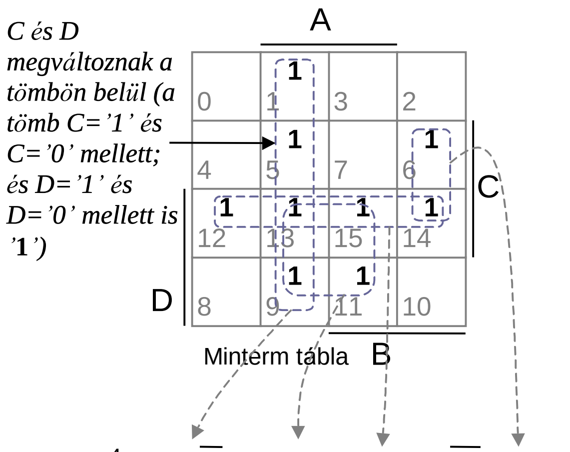


E.2.11.

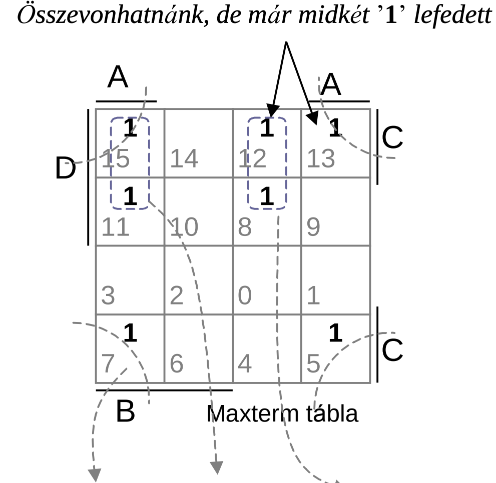
Mutassunk be függvény minimalizálást V-K táblákkal egy felvett függvény diszjunktív illetve konjunktív alakjából kiindulva.

1. Felvesszük a függvény V-K tábláját
2. Implikánsok képzése: az ’1’ állapotú élszomszédos, egy egyenesbe eső cellákból, az ’1’ állapotokat legkevesebb tömbbel lefedő 2^k db cellát tartalmazó tömbök képzése (*élszomszédosak a V-K tábla két függőleges és a két vízszintes peremén lévő cellák is!*) (*egy új tömbbe csak akkor vegyünk be már lefedett elemet, ha az új tömbbe még le nem fedett elem is kerül*)
3. Az egyes implikások felírása azon változók segítségével, amelyek egy implikánson belül nem változnak meg.

Pl.: $F^4 = \sum^4 (1,5,6,9,11,12,13,14,15)$ $\qquad$ $F^4 = \prod^4 (5,7,8,11,12,13,15)$



$F^4 = A \cdot \overline{B} + A \cdot D + C \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot C$



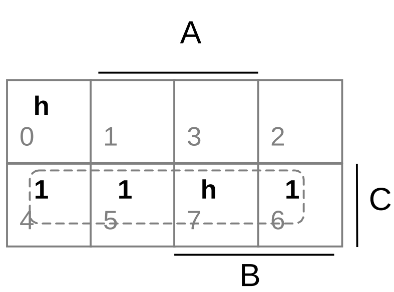
$F^4 = (A+C) \cdot (A+B+D) \cdot (\overline{A}+\overline{B}+D)$

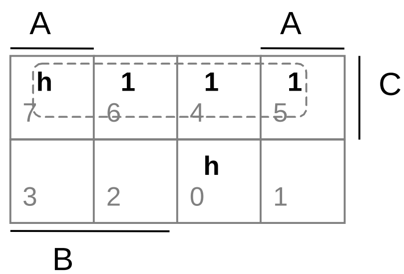
E.2.12.

Mutassuk be egy felvett példán keresztül a részben meghatározott esetek felhasználását a minimál alak előállításában.

A határozatlan állapotokat a V-K táblán szabadon választhatjuk ’0’-nak vagy ’1’-nek, attól függően, hogy a minél kevesebb darabszámú és minél nagyobb implikánsok képzéséhez milyen értékűre van szükség.

pl.: $F_1^3(C,B,A) = \sum^3 (0^h,4,5,6,7^h)$ $\qquad$ $F_1^3(C,B,A) = \prod^3 (0^h,4,5,6,7^h)$





G.2.4.

Bizonyítsuk be hogy az ANTIVALENCIA – ÉS függvénycsoport funkcionálisan teljes (azaz segítségükkel bármely logikai függvény előállítható)! A bizonyításnál felhasználható, hogy a NEM – VAGY – ÉS függvénycsoport bizonyítottan funkcionálisan teljes.

Ha a NEM – VAGY – ÉS függvénycsoport funkcionálisan teljes, akkor az ANTIVALENCIA – ÉS függvénycsoport funkcionálisan teljes, ha segítségével előállítható a NEM -VAGY – ÉS függvénycsoport. Az ÉS függvényt mindkettő tartalmazza, ezért a NEM és a VAGY függvényt kell előállítani.

NEM: $X \oplus 1 = \overline{X}$, tehát a NEM függvényt előállítottuk

VAGY:

$X + Y = \overline{\overline{X + Y}} = \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y}} = ((X \oplus 1) \cdot (Y \oplus 1)) \oplus 1$ tehát a VAGY függvényt is előállítottuk

G. 2.5.

Igazoljuk a tanult módszerek bármelyikével, hogy fennállnak a következő algebrai összefüggések:

a, $X \oplus 0 = X$

b, $X \oplus 1 = \overline{X}$

c, $X \oplus X = 0$

d, $X \oplus \overline{X} = 1$

e, $X \oplus Y = \overline{X \equiv Y}$

f, $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z) = X \oplus Y \oplus Z$

g, $X \cdot (Y \oplus Z) = X \cdot Y \oplus X \cdot Z$

h, $\overline{X \oplus Y} = \overline{X} \oplus Y = X \oplus \overline{Y} = X \cdot Y + \overline{X} \cdot \overline{Y}$

i, $X \oplus Y = X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y$

j, $X \equiv Y = (X + \overline{Y}) \cdot (\overline{X} + Y)$

k, $X \oplus Y = (X + Y) \cdot (\overline{X} + \overline{Y})$

l, $X \oplus Y = (X | \overline{Y}) | (\overline{X} | Y)$

m, $X \oplus Y = (X \| Y) \| (\overline{X} \| \overline{Y})$

n, $X \equiv Y = (X | Y) | (\overline{X} | \overline{Y})$

o, $X \equiv Y = (X \| \overline{Y}) \| (\overline{X} \| Y)$

Az antivalenciafüggvény igazságtáblázata

X	Y	$F_a = X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Az ekvivalenciafüggvény igazságtáblázata

X	Y	$F_e = X \equiv Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

e, A két táblázat összehasonlításából: $F_a = \overline{F_e}$ így az e pontot igazoltuk.

a, F_a táblázatából kiemelve az Y=0 sorokat:

X	Y	$F_a = X \oplus Y$
0	0	0
1	0	1

Az eredmény F_a mindig azonos X-el, így az a pontot igazoltuk

b, F_a táblázatából kiemelve az Y=1 sorokat:

X	Y	$F_a = X \oplus Y$
0	1	1
1	1	0

Az eredmény F_a mindig azonos X negáltjával, így a b pontot igazoltuk

c, F_a táblázatából kiemelve az Y=X sorokat:

X	Y	$F_a = X \oplus Y$
0	0	0
1	1	0

Az eredmény F_a mindig 0, így a c pontot igazoltuk

d, F_a táblázatából kiemelve az $Y = \overline{X}$ sorokat:

X	Y	$F_a = X \oplus Y$
0	1	1
1	0	1

Az eredmény F_a mindig 1, így a d pontot igazoltuk

f, Táblázatosan:

X	Y	Z	X⊕Y	Y⊕Z	X⊕Z	(X⊕Y) ⊕Z	X⊕(Y⊕Z)	(X⊕Z)⊕Y
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1

Látható, hogy a három változót bárhogyan csoportosítva az eredmény minden lehetséges bemeneti kombinációra megegyezik, ezért a zárójel elhagyható.

g, Táblázatosan:

X	Y	Z	Y⊕Z	X(Y⊕Z)	XY	XZ	XY⊕XZ
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Látható, hogy a két kérdéses művelet eredménye minden lehetséges bemeneti kombinációra megegyezik

h, Táblázatosan

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	X⊕Y	$\overline{X \oplus Y}$	$\overline{X} \oplus Y$	$X \oplus \overline{Y}$	XY	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$	$XY + \overline{X} \cdot \overline{Y}$
0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1

Látható, hogy a kérdéses műveletek eredményei minden lehetséges bemeneti kombinációra megegyeznek

i, Táblázatosan

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X \oplus Y$	$X\overline{Y}$	$\overline{X}Y$	$X\overline{Y}+\overline{X}Y$
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0

Látható, hogy a kérdéses műveletek eredményei minden lehetséges bemeneti kombinációra megegyeznek

j, $X \equiv Y = (X+\overline{Y})\cdot(\overline{X}+Y)$

Azt az e pontban bizonyítottuk, hogy $X \oplus Y = \overline{X \equiv Y}$, továbbá az i pontban, hogy $X \oplus Y = X\cdot\overline{Y}+\overline{X}\cdot Y$. Ebből:

$X \equiv Y = \overline{X \oplus Y} = \overline{X\cdot\overline{Y} + \overline{X}\cdot Y}$ *DeMorgan*

$X \equiv Y = \overline{X \oplus Y} = \overline{X\cdot\overline{Y}} \cdot \overline{\overline{X}\cdot Y}$ *DeMorgan ismét*

$X \equiv Y = \overline{X \oplus Y} = (\overline{X} + Y) \cdot (X + \overline{Y})$

k, $X \oplus Y = (X+Y)\cdot(\overline{X}+\overline{Y})$

A h pont alapján $\overline{X \oplus Y} = X\cdot Y + \overline{X}\cdot\overline{Y}$ ebből:

$X \oplus Y = \overline{X\cdot Y + \overline{X}\cdot\overline{Y}}$ *DeMorgan*

$X \oplus Y = \overline{X\cdot Y} \cdot \overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}$ *DeMorgan ismét*

$X \oplus Y = (\overline{X} + \overline{Y}) \cdot (X + Y)$

l, $X \oplus Y = (X|\overline{Y})|(\overline{X}|Y)$

Az i pont alapján $X \oplus Y = X\cdot\overline{Y}+\overline{X}\cdot Y$. Ebből kétszeres negálással és DeMorgan átalakítással:

$X \oplus Y = \overline{\overline{X\cdot\overline{Y} \cdot \overline{X}\cdot Y}} = \overline{\overline{X\cdot\overline{Y} \cdot \overline{X}\cdot Y}} = (X|\overline{Y}) \mid (\overline{X}|Y)$

m, $X \oplus Y = (X\|Y)\|(\overline{X}\|\overline{Y})$

A k pont alapján $X \oplus Y = (X+Y)\cdot(\overline{X}+\overline{Y})$. Ebből kétszeres negálással és DeMorgan átalakítással:

$X \oplus Y = \overline{\overline{(X+Y)\cdot(\overline{X}+\overline{Y})}} = \overline{\overline{(X+Y)} + \overline{(\overline{X}+\overline{Y})}} = (X\|Y)\|(\overline{X}\|\overline{Y})$

n, $X \equiv Y = (X|Y)|(\overline{X}|\overline{Y})$

Az e pont alapján $X \oplus Y = \overline{X \equiv Y}$ továbbá a k pont alapján $X \oplus Y = (X+Y)\cdot(\overline{X}+\overline{Y})$. Ebből kétszeres negálásokkal DeMorgan átalakításokkal:

$X \equiv Y = \overline{X \oplus Y} = \overline{(X+Y)\cdot(\overline{X}+\overline{Y})} = \overline{\overline{\overline{(X+Y)}} \cdot \overline{\overline{(\overline{X}+\overline{Y})}}} = \overline{\overline{(\overline{X}\cdot\overline{Y})} \cdot \overline{(X\cdot Y)}} = (\overline{X}|\overline{Y})|(X|Y)$

o, $X \equiv Y = (X\|\overline{Y})\|(\overline{X}\|Y)$

A j pont alapján $X \equiv Y = (X+\overline{Y})\cdot(\overline{X}+Y)$. Ebből kétszeres negálással és DeMorgan átalakítással:

$X \equiv Y = (X+\overline{Y}) \cdot (\overline{X}+Y) = \overline{\overline{(X+\overline{Y}) \cdot (\overline{X}+Y)}} = \overline{\overline{(X+\overline{Y})} + \overline{(\overline{X}+Y)}} = (X\|\overline{Y})\|(\overline{X}\|Y)$

G2.9

$Y = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$ logikai vázlata

a: kizárólag NAND elemekkel

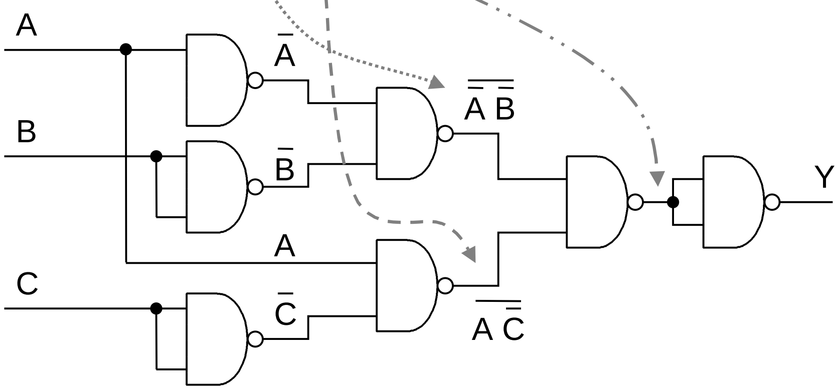
b: kizárólag NOR elemekkel

a:

Felhasználjuk a $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$ DeMorgan azonosságot, valamint hogy $\overline{A \cdot A} = \overline{A}$:

$$Y = (A + B)(\overline{A} + C) = (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})(\overline{A\,\overline{C}}) = \overline{\overline{(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})(\overline{A\,\overline{C}})}}$$

$$Y = \overline{\overline{(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})(\overline{A\,\overline{C}})}}$$

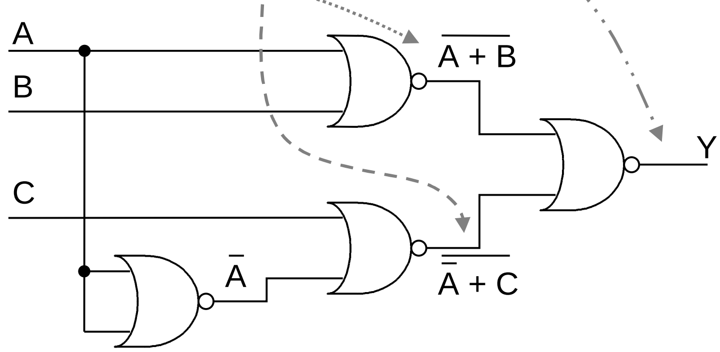


b:

Felhasználjuk a $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A + B}$ DeMorgan azonosságot, valamint hogy $\overline{A \cdot A} = \overline{A}$:

$$Y = (A + B)(\overline{A} + C) = \overline{\overline{(A + B)} + \overline{(\overline{A} + C)}}$$

$$Y = \overline{\overline{(A + B)} + \overline{(\overline{A} + C)}}$$

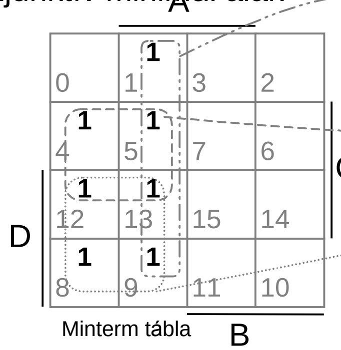


G2.10.

$$Y = \sum^{4}(1,4,5,8,9,12,13) \ \textit{(mintermekkel megadott függvény)}$$

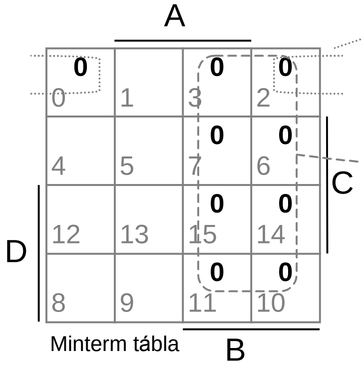
a: diszjunktív minimál alak
b: konjunktív minimál alak

a: diszjunktív minimál alak



$$Y = A\cdot\overline{B} + C\cdot\overline{B} + D\cdot\overline{B}$$

b: konjunktív minimál alak (*a negált függvény minterm táblás elöállításával*)



$$\overline{Y} = B + \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} \qquad \textit{negáljuk}$$

$$Y = \overline{B + \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}} \qquad \textit{DeMorgan}$$

$$Y = \overline{B}\cdot(\overline{\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}}) \qquad \textit{DeMorgan újra}$$

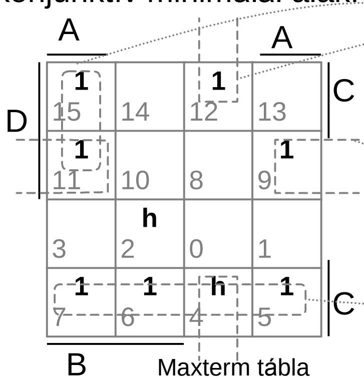
$$Y = \overline{B}\cdot(A + C + D)$$

G2.11.

$$Y = \prod^{4}(2^{h},4^{h},5,6,7,9,11,12,15) \ \textit{(maxtermekkel megadott függvény)}$$

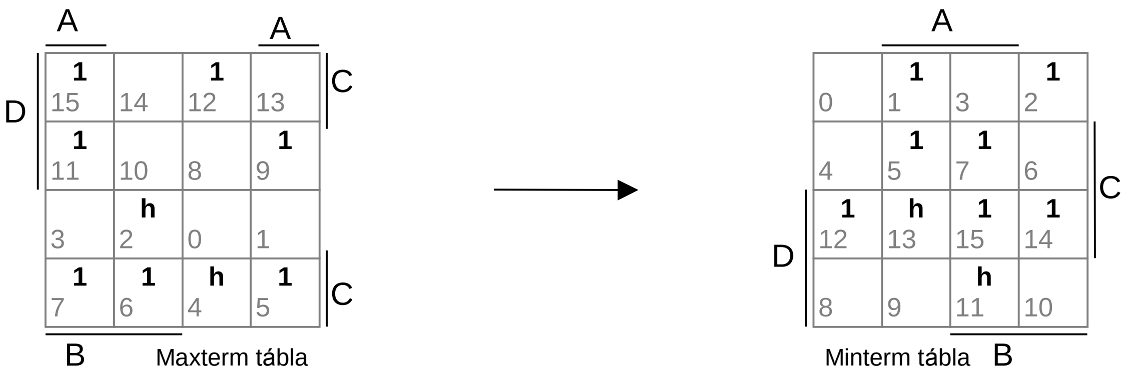
a: írjuk fel a minimál alakokat
b: Soroljuk fel a konjunktív minimál alaknál használt implikánsokat

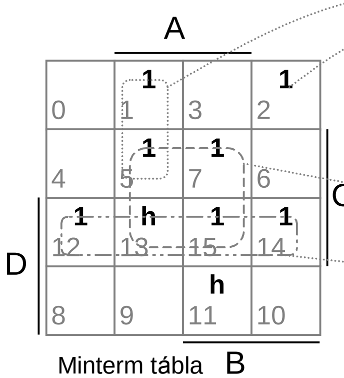
a: konjunktív minimálál alak:



$$Y = (A+\overline{C}+D)\cdot(A+B+D)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)\cdot(C+\overline{D})$$

Diszjunktív minimál alak: *maxterm táblát alakítsuk minterm táblává*





$$Y = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}\cdot \overline{D} + A\cdot \overline{B}\cdot \overline{D} + A\cdot C + C\cdot D$$

b: a konjunktív minimál alak egyes implikánsai:

1. $V_{15}^{4}\cdot V_{11}^{4} = A + B + D$
2. $V_{9}^{4}\cdot V_{11}^{4} = A + \overline{C} + D$
3. $V_{4}^{4}\cdot V_{12}^{4} = \overline{A} + \overline{B} + C$
4. $V_{4}^{4}\cdot V_{5}^{4}\cdot V_{6}^{4}\cdot V_{7}^{4} = C + \overline{D}$

G 2.12.

Határozzuk meg a következő két függvény ekvivalenciájaként előállított eredő függvényt, majd írjuk fel a legegyszerűbb algebrai alakban.

$$Y_I = F_I^4(D,C,B,A) = \sum^{4}(1,3,5,7,9,11,12,14)$$

$$Y_{II} = F_{II}^4(D,C,B,A) = \sum^{4}(2,3,4,5,8,9,12,13)$$

Az ekvivalenciafüggvény igazságtáblázata

Y_I	Y_{II}	$Y_e = Y_I \equiv Y_{II}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Táblázatosan megoldva (*Y_I és Y_{II} oszlopát a megadott függvény alalpján töltjük ki, azaz a megadott sorszámú **mintrem**hez **1-t** írunk*):

Minterm sorszám	D	C	B	A	Y_I	Y_{II}	$Y_e = Y_I \equiv Y_{II}$
0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	1	1	1	1
4	0	1	0	0	0	1	0
5	0	1	0	1	1	1	1
6	0	1	1	0	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	1	1	1
10	1	0	1	0	0	0	1
11	1	0	1	1	1	0	0
12	1	1	0	0	1	1	1
13	1	1	0	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1	0	0
15	1	1	1	1	0	0	1

Y_e-t beírva a minterm V-K táblába:

A

1 0	1	**1** 3	2
4	**1** 5	7	**1** 6
1 12	13	**1** 15	14
8	**1** 9	11	**1** 10

C D

Minterm tábla B

A sakktáblaszerű kitöltés miatt ez a négy változó antivalencia vagy ekvivalenciafüggvénye lehet. Mivel Y_e akkor ad '1'-t, ha a változók közül páros számú (*vagy 0 db*) '1', ez az ekvivalenciafüggvény:

$Y_e = (D \equiv C \equiv B \equiv A)$